UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

TESIS DOCTORAL

Invariantes operacionales matemáticos en los proyectos de investigación matemática con estudiantes de secundaria

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Constantino de la Fuente Martínez

DIRECTORES

Inés María Gómez Chacón
Abraham Arcavi

Madrid, 2017

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Álgebra

INVARIANTES OPERACIONALES MATEMÁTICOS EN LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Por

Constantino de la Fuente Martínez

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Madrid, Enero de 2016

Directora:
Inés Mª Gómez-Chacón (Universidad Complutense, Madrid)
Codirector:
Abraham Arcavi (Weizman Institute of Science, Israel)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Departamento de Álgebra

INVARIANTES OPERACIONALES MATEMÁTICOS EN LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Por

Constantino de la Fuente Martínez

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Madrid, Enero de 2016

Directora:
Inés Mª Gómez-Chacón (Universidad Complutense, Madrid)
Codirector:
Abraham Arcavi (Weizman Institute of Science, Israel)

DEDICATORIA

Deseo dedicar este trabajo a las dos personas
que más quiero y más han significado en mi vida.
A vosotras dos: Rosa y Violeta.

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero y profundo agradecimiento para mis Directores,
Inés y Abraham,
sin cuyas orientaciones nada de esto hubiera sido posible.
Muchas gracias por vuestra paciencia y
por vuestra capacidad para motivarme
en los momentos más complicados y difíciles de este trabajo.
Nunca os lo podré agradecer en su justa medida.

ÍNDICE

0 RESÚMENES

0.1. ABSTRACT

The doctoral thesis "Mathematical Operational Invariants in Mathematical Research Projects with Secondary School students" is a contribution to the area of Mathematics Education, within the scope of the processes of advanced mathematical thought and the design of materials that contribute to promote it.

The questions from the starting point of the work are: Is it possible to characterize a Mathematic Research Project (MRP) as a task for Secondary School students? Can a MRP be developed in the previous stages before University? If the answer to the latter question is affirmative, what mathematical processes do students implement in the development of a MRP? Do these tasks, which are not routine for the teacher, have any influence on their connection with scientific or didactic knowledge?

Once the research problem is located in its various aspects (task, student and teacher), the thesis proposes the following objectives:

> Obj1. To clarify the concept and structure of a MRP, distinguishing it from other school tasks.
>
> OBJ2. To establish connections between the tasks about solving problems and MRP, characterizing the process of obtaining a MRP from a problem-solving task.
>
> OBJ3. To study the role of some mathematical processes that the student implements in solving the research problem.
>
> OBJ4. To exemplify the utility of the MRP to produce changes in the teacher's knowledge.

The theoretical framework for addressing this research has the Theory of Activity as a basis and, within it, the model provided as Mediated Activities through an Instrument and the process of transforming a resource into a document, as the Genesis Documentary stipulates. The framework establishes categories of mediation: epistemic, pragmatic and heuristic, identifying types of situations that occur in the development of a MRP. To establish these categories, the mediated activity model through an instrument has been contextualized; it has been particularized in three cases, depending on the experiment in which it is used and the mediation that is prioritized, identifying the kinds of situations, families of activities and the professional domains of the activity, making the operational invariants or the mathematical knowledge explicit depending on the diagram of the instrument.

The methodology of the research is situated in the paradigm of Design-Based Research (DBR), carried out in a natural and articulated context in three successive experiments, one in each school year, with 5, 6 and 3 students: 12 of them are from Baccalaureate and 2 on from Compulsory Secondary Education, respectively. In the first one, the content consisted of generating a MRP from a problem-solving task and measures analyzed were considered to be the pragmatic type. In the second one, the issue of work has been the role of the examples and counterexamples while working with conjectures and the

reasoning in the process of looking for the testing or the demonstration; in this case the epistemic mediations have been prioritized. Finally, in the third experiment, the subject of study talks about the changes that may occur in the knowledge of the teacher in the development of a MRP; for that reason, heuristic mediations have been studied.

In each experiment a qualitative analysis of the data has been done, which allows the theory and the practice to be adjust and to clarify the situations, mediations and mathematical processes. Also, the results of each cycle of experimentation have been used to reformulate the next one.

The results of the investigation provide answers for the objectives, value aspects of the method used and provide didactic conclusions and future implications. These include:

1. Conceptualization of MRP. Definition, structure and phases. Identification of the invariants and mathematical processes in a MRP.

2. The role of examples and counterexamples in working with conjectures. Generic examples, patterns of generalization of results and processes. Patterns of plausible reasoning. Expansion of the inductive fundamental pattern proposed by Polya.

3. The analogy in the processes of generalization. Uses of analogy and meaning of each of the applications. Relations between analogy and generalization.

4. Detection of changes in the knowledge of the teacher. Types of changes.

The study concludes with a set of principles for designing and implementing the tasks through Mathematics Research Projects in the classroom, together with proposals for the future.

0.2. RESUMEN EN CASTELLANO

El trabajo de tesis doctoral "*Invariantes operacionales matemáticos en Proyectos de Investigación Matemática con estudiantes de Secundaria*" constituye una contribución al área de la Educación Matemática, dentro del ámbito de los procesos de pensamiento matemático avanzado y el diseño de materiales e interacciones que contribuyen a promoverlo.

Las preguntas que sirven como punto de partida al trabajo son: ¿Es posible caracterizar un Proyecto de Investigación Matemáticas (PIM) como tarea para los estudiantes en el contexto de la Educación Secundaria? ¿En qué condiciones se puede llevar a cabo un PIM en las etapas anteriores a la Universidad? Si la respuesta a esta última cuestión es afirmativa, ¿qué procesos matemáticos ponen en práctica los estudiantes de estos niveles educativos en el desarrollo de un PIM? Estas tareas, que no son rutinarias para el profesor, ¿tienen alguna influencia en su marco de conocimientos científicos o didácticos?

Una vez situado el problema de investigación en sus diferentes vertientes (tarea, estudiante y profesor), la tesis se plantea los siguientes objetivos:

OBJ1. Clarificar el concepto y la estructura de un PIM, distinguiéndolo de otras tareas que conllevan la realización de una investigación matemática en el contexto escolar.

OBJ2. Establecer conexiones entre las tareas de resolución de problemas y los PIM, a través de la caracterización del proceso de obtención de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas.

OBJ3. Profundizar en el estudio del papel que juegan algunos procesos matemáticos, que pone en práctica el estudiante en el desarrollo de un PIM, para la resolución del problema de investigación.

OBJ4. Ejemplificar la utilidad de los PIM para producir cambios en los conocimientos del profesor.

El marco teórico que permite abordar los objetivos del trabajo tiene como sustrato la Teoría de Actividad y, dentro de ella, el modelo que proporcionan las actividades mediadas por un instrumento y el proceso de transformación en un recurso, explicitadas de las aproximaciones de Génesis Instrumental y Documental. Dicho marco permite establecer categorías de mediación: epistémicas, pragmáticas y heurísticas, así como la identificación de tipologías de situaciones que se dan en el desarrollo de un PIM. Para establecer dichas clasificaciones, se ha llevado a cabo una contextualización del modelo de actividad mediada por un instrumento y los conocimientos del profesor. Se ha particularizado en tres casos, en función de la experimentación en la que se utiliza y de la mediación que se prioriza. Estos casos permiten identificar las clases de situaciones, familias de actividad y los dominios o ámbitos profesionales de la actividad, y hacer explícitos los invariantes operacionales o conocimientos matemáticos en acción de los esquemas del instrumento.

La metodología de investigación se sitúa en el paradigma de Design-Based Research (RBD), llevada a cabo en un contexto natural y articulada en tres experimentaciones sucesivas, una en cada curso escolar, con 5, 6 y 3 estudiantes, de los cuales 12 son de bachillerato y 2 de la Educación Secundaria Obligatoria, respectivamente. En la primera, el contenido tratado ha sido la generación de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas (problem solving) y las mediciones analizadas han sido las de tipo pragmático. En la segunda, el tema de trabajo ha sido el papel de los ejemplos y contraejemplos en el trabajo con conjeturas y los razonamientos en el proceso *de búsqueda de la prueba* o demostración; en este caso las mediaciones priorizadas han sido las *epistémicas*. Por último, en la tercera experimentación, el tema de trabajo ha sido los *cambios que se pueden dar en los conocimientos del profesor* en el desarrollo de un PIM; para ello se han estudiado las mediaciones de tipo *heurístico*.

En cada experimentación se ha realizado un análisis cualitativo de los datos, que ha permitido llevar a cabo ajustes entre la teoría y la práctica, posibilitando la precisión de situaciones, mediaciones y procesos matemáticos. Asimismo, los resultados de cada ciclo de experimentación se han utilizado para reformular el siguiente ciclo.

Los resultados obtenidos en la investigación dan respuesta a los objetivos planteados, valoran aspectos del método utilizado y establecen conclusiones didácticas e implicaciones futuras. Entre dichos resultados se destacan:

0. Conceptualización de PIM. Definición, estructura y fases.
1. Identificación de los invariantes y procesos matemáticos en un PIM.
2. Profundización en el papel de ejemplos y contraejemplos en la elaboración y justificación de conjeturas. Ejemplos genéricos, patrones de generalización de resultados y de procesos. Razonamientos y patrones de razonamiento plausible.
3. Caracterización de la analogía en los procesos de generalización. Usos de la analogía y significado de cada uno de los usos. Relaciones entre la analogía y la generalización. Ampliación el patrón fundamental inductivo propuesto por Polya.
4. Detección de cambios en los conocimientos del profesor. Tipos de modificaciones.

El trabajo concluye con una serie de principios para diseñar e implementar en el aula el trabajo por Proyectos de Investigación Matemática, junto con líneas abiertas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo de introducción, se presentarán dos aspectos fundamentales de la investigación: a) motivación y justificación de la misma, mostrando la importancia y complejidad del tema de elegido; b) el problema de investigación, con las preguntas que se plantean en el mismo, así como los objetivos que se esperan conseguir.

1.1. Motivación y justificación

Para la justificación y motivación de este trabajo de tesis, se desarrollarán varias líneas argumentales:

1) El currículo oficial de las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y en Bachillerato (Bach.). Una de las primeras cuestiones de interés, en relación con el tema de la investigación, es si los proyectos de investigación matemática figuran en el currículo oficial de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Dadas las actuales circunstancias, de cambio de ley educativa, se hará una breve revisión del currículo vigente hasta el curso 2014/15 y del nuevo currículo, publicado en el proceso de desarrollo de la nueva ley educativa, la LOMCE.

2) Los proyectos de investigación como tareas matemáticas. La variedad y complejidad de las tareas matemáticas que propone el profesor, en su práctica diaria de aula, hace necesario reflexionar sobre cómo se sitúan los proyectos de investigación en la tipología de tareas, y profundizar en su significado y contenido.

3) El profesor/a de matemáticas. En esta línea se argumentará sobre los distintos grados de conocimiento del profesor sobre este tipo de tareas.

4) El estudiante. En este caso, se analizará cómo se posiciona el estudiante ante una tarea de investigación matemática.

1.1.1. El currículo oficial de matemáticas

La primera idea que motiva y justifica la investigación radica en el propio currículo de matemáticas de las etapas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato (Bach.). Si se analizan ambos, se puede ver que, o bien en los contenidos o en los criterios de evaluación y con diferentes grados de explicitación, se menciona la realización de procesos de investigación matemática o, al menos, de acercamiento a ellos. En este análisis no se van a hacer valoraciones sobre el nivel de transferencia del currículo oficial a las programaciones concretas de aula, que lleva a cabo el profesorado, y que habitualmente está condicionado por las editoriales, a través de los libros de textos utilizados; es decir, no se entrará en el espinoso tema de hasta qué punto cumple el profesorado con las prescripciones que emanan del currículo. Lo que se realizará a continuación es una identificación de aquellos aspectos del currículo relacionados con el contenido de esta investigación.

Currículo de la Ley Orgánica de la Calidad Educativa (LOCE)

En primer lugar se centrará la búsqueda en las matemáticas de ESO. A este respecto, el currículo vigente hasta el curso 2014-15 (MECD, 2007, pág. 752), en el Bloque 1 de los contenidos de la opción B de las matemáticas de 4º de ESO, distingue (MECD, 2007, pág. 759):

> *Bloque 1. Contenidos comunes.*
>
> *–Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización.*
>
> *–Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales y procedimientos de resolución con la precisión y rigor adecuados a la situación.*

El Bloque 1 se denomina de *contenidos comunes*, porque lo componen todos los que se deben tratar en los demás Bloques. No son contenidos ligados a conocimientos de tipo conceptual (Aritmética, Álgebra, Geometría, Funciones, Estadística, etc.) sino que están más ligados a contenidos procedimentales, procesuales y actitudinales. Aquí se han seleccionado los que tienen conexiones fuertes con la investigación que se presenta.

Como se puede observar, el currículo de matemáticas de 4º de ESO hace mención de los procesos de *generalización* y *emisión y justificación de hipótesis*, planteando su utilización en el desarrollo de la programación del curso. Estos procesos mentales forman parte de los utilizados habitualmente en los procesos de investigación y en las investigaciones matemáticas, constituyendo, en sí mismos, un primer nivel de acercamiento a los mismos en la ESO.

Así mismo, se menciona explícitamente la *expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales y procedimientos de resolución con la precisión y rigor adecuados a la situación*. Esto es realmente interesante, ya que se plantea que el estudiante debe expresar, ya sea oralmente o por escrito:

a) sus *argumentaciones*, o lo que es lo mismo, sus razonamientos y justificaciones en todo tipo de proceso de búsqueda de pruebas o demostraciones;

b) las *relaciones cuantitativas y espaciales,* que incluyen patrones numéricos, propiedades numéricas, fórmulas, modelos geométricos, etc.;

c) los *procedimientos de resolución,* que comprenden las estrategias utilizadas, los pasos dados y los resultados obtenidos.

Hay que señalar que, aunque el currículo deja libertad para que la *expresión* se pueda llevar a cabo de forma oral o escrita, lo habitual es que se haga de la última de ellas, sobre todo si se quiere llevar a cabo una evaluación del nivel de consecución de estos contenidos por el estudiante.

Por otra parte, en el currículo de Bachillerato (MECD, 2007a, pág. 45449-45450) en el correspondiente a las matemáticas I y II, de la opción de Ciencias y Tecnología, en los criterios de evaluación nº 10 de las Matemáticas I y nº 12 de las Matemáticas II se dice (MECD, 2007, pág. 45450):

> *Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.*
>
> *Se pretende evaluar la madurez del alumnado para enfrentarse con situaciones nuevas procediendo a su observación, modelado, reflexión y argumentación adecuada, usando las destrezas matemáticas adquiridas. Tales situaciones no tienen por qué estar directamente relacionadas con contenidos concretos; de hecho, se pretende evaluar la capacidad para combinar diferentes herramientas y estrategias, independientemente del contexto en que se hayan adquirido.*

Como se puede ver, se menciona explícitamente que el estudiante debe ser capaz de realizar *investigaciones* en las que haya que trabajar con informaciones o datos, concretamente *organizar y codificar*, junto con la *selección, comparación y valoración* de las estrategias más eficaces para la resolución de las *situaciones nuevas*. Además, este criterio de evaluación es común para las matemáticas de la opción de Ciencias y Tecnología de los dos cursos de Bach.

Después de este recorrido por el currículo de matemáticas de la LOCE, se podría concluir que en los contenidos y en los criterios de evaluación se plantean algunos procesos relacionados con las tareas de investigación, pero, en general son aproximaciones poco concretas. Solamente en la etapa de Bachillerato, en la Modalidad de Ciencias y Tecnología, aparecen las investigaciones explícitamente en los criterios de evaluación.

Además de lo anterior, hay que mencionar dos aspectos específicos del currículo de Bachillerato que completan las conexiones con las investigaciones:

a) La Comunidad Autónoma de Cataluña plantea, en su currículo de Bachillerato, la obligatoriedad de realizar un trabajo de investigación en una de las materias, que será valorado con unos créditos horarios para los estudiantes. Este aspecto del currículo no se plantea en ninguna otra Comunidad. Este trabajo responde plenamente a la idea de acercar al estudiante al proceso de descubrimiento y a practicar los métodos de trabajo específicos de la materia elegida por él.

b) A lo largo de los últimos años, algunas Comunidades Autónomas han puesto en marcha una variante del Bachillerato, que denominan Bachillerato de Investigación y/o de Excelencia (la denominación depende de los lugares) en los que se plantea, la introducción del estudiante en los procesos de investigación, el método científico, metodologías de investigación, etc., cursando una materia con estos contenidos en el primer curso del Bachillerato, y realizando un trabajo de investigación en una de las materias de modalidad de la opción elegida (Ciencias de la Naturaleza, Ciencias de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales) en el segundo curso. Como ejemplo, la *ORDEN EDU/551/2012, de 9 de julio, por la que se* *regula la implantación y el desarrollo del Bachillerato de Investigación/Excelencia en la Comunidad de Castilla y León* (Bocyl de 18-07-2012) plantea, entre otras cosas:

El bachillerato de Investigación/Excelencia constituye una opción educativa dentro del bachillerato dirigida al alumnado que tenga interés en profundizar en los diferentes métodos de investigación y en el análisis de los problemas propios de cualquier investigación. Permite conciliar la formación generalista imprescindible con la capacidad para investigar y ahondar en su conocimiento y su práctica. En este sentido, los métodos de trabajo se convierten en fundamentales.

Por tanto, este tipo de Bachillerato plantea la investigación como el eje vertebrador y diferenciador del mismo con respecto al otro Bachillerato, haciendo hincapié en la importancia de los métodos de trabajo, que poseen especificidades propias en cada materia o campo de conocimientos.

Currículo de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

El currículo de Matemáticas de La LOMCE, en ESO y Bachillerato tiene previsto implantarse entre los cursos 2015/16 y 2016/17 (MECD, 2015) por lo que actualmente no está implantado en su totalidad.

En los cursos de 1º y 2º de ESO, las matemáticas son las mismas para todos los estudiantes. En 3º y 4º de ESO, son una materia que cursan todos los estudiantes, pero deben elegir uno de los dos tipos de matemáticas: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas y Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

En el Bloque 1, de los currículos de todas las materias de matemáticas, denominado *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, se proponen los contenidos que tienen, como contextos para su desarrollo, el resto de Bloques. Los contenidos de este primer bloque son: *resolución de problemas, investigaciones matemáticas, procesos de modelización y matematización, actitudes y uso de tecnologías*. En la introducción del currículo se hace referencia explícita a este hecho (MECD, 2015, pág. 390):

El bloque de "procesos, métodos y actitudes en matemáticas" es un bloque común [...] que debe desarrollarse de modo transversal y simultáneamente al resto de bloques de contenido, ya que constituye el hilo conductor de la asignatura. Se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.

En Bachillerato, el currículo de Matemáticas I y II (para la opción de Ciencias) también plantea, de igual manera para los dos cursos, la realización de investigaciones y la elaboración de un informe (MECD, 2015, pág. 414). Se presentan en la Tabla 1.1.

Como se puede ver en la Tabla 1.1., los planteamientos del currículo de Matemáticas para Bachillerato de Ciencias, en lo referente a las investigaciones, recoge todos los aspectos habituales para la planificación un proceso de investigación: *problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc*.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
…… • Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.	…… 5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado	…… 5.1. Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 5.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado 5.3. Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc.
	6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.	6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.).
• Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollad.	7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados.	7.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia.

Tabla 1.1. Investigaciones en el Currículo LOMCE. Matemáticas I y II

Además se plantea la práctica de *estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.* Entre estas estrategias, concretamente la primera de ellas, que plantea *la generación de investigaciones matemáticas, a partir de la resolución de un problema y la profundización posterior,* está muy relacionada con los contenidos expuestos en el Capítulo 5 de esta tesis, en el que se profundiza sobre el *proceso de generación de un proyecto de investigación matemática* (por medio de la obtención de uno o varios problemas de investigación) a partir de la *resolución* y posterior *extensión* de una *tarea de resolución de problemas*. Estos aspectos, que están relacionados con alguna parte de los trabajos de investigación de esta tesis, no se habían planteado nunca en el currículo de matemáticas hasta ahora, al menos de forma explícita.

En cuanto al informe, se plantea la elaboración de *un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados.* Como se puede observar es un *informe científico*. En ESO sólo se hablaba de un informe; en Bachillerato se califica de *científico,* por lo que se supone que los niveles de rigor, precisión, argumentación, etc. serán distintos en los dos casos, no sólo los contenidos trabajados.

Recapitulando las ideas principales de este análisis del currículo de la LOMCE en lo que se refiere a las investigaciones matemáticas y proyectos de investigación matemática: 1) el currículo de la LOMCE da pasos adelante para su incorporación a la práctica cotidiana del aula, de forma explícita, concretando muchos aspectos de tipo procedimental y de evaluación, para que la incorporación sea real; 2) algunas de las propuestas del currículo de la LOMCE están relacionadas con alguno de los temas de trabajo de esta investigación de tesis, como se ha comprobado más arriba; 3) El currículo menciona investigaciones matemáticas y proyectos de investigación matemática, asignándoles el mismo significado, pero esta es una cuestión discutible, que se aborda en el Capítulo 2 de este documento.

De todo lo anterior, se puede concluir que dada la presencia de las investigaciones y proyectos de investigación en el currículo, junto con aspectos complejos mencionados en el párrafo anterior, tiene sentido plantearse, desde la educación matemática, una investigación que profundice en algunos de los aspectos que, a propósito de ellas, se plantean en el currículo.

1.1.2. Las tareas matemáticas

Es un hecho innegable la abundancia y variedad de tareas matemáticas que se pueden proponer a los estudiantes en clase. Esto genera situaciones complejas, desde el punto de vista de la educación matemática, tanto en los profesores como en los estudiantes.

Frobisher (1994) plantea las relaciones existentes entre las tareas de resolución de problemas y las investigaciones matemáticas. Además, desde hace más de una década, distintos expertos han ido planteando la necesidad de distinguir, en situaciones de aprendizaje, qué aspectos caracterizan una investigación matemática: el carácter abierto y multifacético (Lee y Miller (1997, p. 6), la intersección con la resolución de problemas (Schoenfeld (1985), Ernest (1991)) o la distinción entre una investigación y un proyecto de trabajo tanto en el criterio como en lista de tareas exigibles al estudiante (Yeo (2007)).

Esta búsqueda, para precisar y diferenciar los proyectos de investigación matemática, ha hecho que, entre los objetivos de esta tesis, se haya planteado el estudio de los distintos significados del término tarea matemática, con el fin de situar los proyectos de investigación matemática en el mosaico de las tareas, haciendo explícita su complejidad, definiéndolos adecuadamente y dotándolos de significado en el contexto escolar de la enseñanza secundaria. Todo ello se ha recogido en el Capítulo 2 de esta tesis. Conviene aclarar, en este momento, que la complejidad no ha sido la variable que se ha tenido en cuenta para trabajar en estas tareas, sino que ha sido la trayectoria previa del doctorando (con un trabajo continuado y práctico con este tipo de tareas) la principal causa que ha influido en la elección.

1.1.3. El profesor o profesora ante los proyectos de investigación matemática

Las tareas matemáticas que conllevan algún tipo de investigación (cfr. Capítulo 2) no son muy habituales en la práctica cotidiana del profesor. Ello es debido a diferentes causas. Entre ellas destacan las siguientes:

- El desconocimiento y confusión en el contenido y significado de las tareas
- La incertidumbre que generan en el profesor las tareas que conllevan procesos de investigación
- Otras circunstancias extracurriculares.

Desconocimiento y confusión en el contenido y significado de las tareas.

Se ha optado por agrupar estas dos causas, porque casi todas las confusiones tienen su origen en una falta de conocimiento preciso y claro de las características de las tareas. En este sentido, es necesario resaltar que el conocimiento de la tarea engloba su estructura (contenido, características, fases, etc.) y su significado y aprovechamiento en el contexto escolar (objetivos de aprendizaje a conseguir con ella, metodología de su puesta en práctica, procesos mentales que el estudiante pone en práctica, evaluación, etc.)

Como se ha visto en el apartado anterior (para ampliar la información consultar el Capítulo 2), la variedad de tareas matemáticas es grande; esto, junto con el desconocimiento de los profesores sobre el contenido y significado de cada una de ellas, puede hacer que no se decidan a plantear determinados tipos de tareas en el aula.

La falta de estudios sobre el tema en España, hace que haya que acudir a investigaciones realizadas con los profesores de otros países. Un caso paradigmático es la investigación realizada en Singapur por Yeo (2008); ella servirá de aval empírico para reseñar algunas de las falta de conocimientos de los profesores sobre el significado de las investigaciones matemáticas en el contexto escolar español. A este respecto, Yeo (2008) señala, en el contexto de profesores de Singapur:

> *Siempre que menciono el término "investigación matemática", un número de profesores me miran, se quedan en blanco y dirán, "qué es eso?" Algunos profesores tienen una idea vaga de que la investigación matemática tiene algo que ver con el aprendizaje por descubrimiento dirigido, pero, hay algunas diferencias importantes. Muy pocos profesores saben realmente qué son las tareas de investigación abiertas, y cuando están frente a una de ellas, los más, si no todos, no saben qué hacer (esto fue recogido en los cursos para los profesores dirigidos por mí). Si la mayoría de los profesores no están al corriente del término "investigación*

matemática abierta", entonces es imposible que enseñen a sus estudiantes cómo ocuparse de este tipo de tareas. (p. 614).

La confusión del profesor sobre las tareas tiene claras consecuencias en el desarrollo de las habilidades a potenciar en el estudiante:

> *Si un profesor no sabe las diferencias entre los tipos de tareas matemáticas, ¿cómo puede él o ella utilizarlas para desarrollar los variados aspectos de las estructuras mentales de los estudiantes, puesto que se utilizan diferentes tareas para cultivar diversos tipos de habilidades de pensamiento?* (Yeo 2007, p. 1)

La cuestión que se acaba de plantear es de suma importancia. A veces, el profesor plantea tareas, ingenuamente, sin tener claros los objetivos didácticos y los aprendizajes que va a poder conseguir con sus estudiantes; es decir, sin hacer una planificación explícita de los mismos, pensando que, por ejemplo, la repetición insistente de determinados tipos de tareas hace que se consigan, aunque queden implícitos y no se puedan constatar. El mismo autor, más adelante recalca la importancia de esto:

> *Es crucial que los profesores entiendan las diferencias entre estas tareas, especialmente para su propuesta de enseñanza, de modo que puedan elegir las tareas más convenientes para sus estudiantes.* (Yeo 2007, p. 1)

A la importancia de entender esas diferencias, se suma la responsabilidad del profesor en estas cuestiones. Como plantea el NCTM (1991):

> *... es responsabilidad central de los profesores seleccionar y desarrollar tareas de eficaces y materiales que crean las oportunidades para que los estudiantes desarrollen el razonamiento, sus capacidades, intereses y disposiciones matemáticos.* (p. 24).

Por ejemplo, en lo que respecta a las investigaciones y las tareas investigadoras, Yeo (2007) recalca:

> *Algunos educadores no distinguen entre una tarea investigadora y una investigación [...]. Hay una diferencia entre los problemas y la resolución de los problemas. Un problema se refiere a una situación que sea problemática para una persona, y en el aula, implica generalmente una tarea dada, mientras que resolver el problema se refiere al proceso de solucionarlo. Si la resolución del problema se ve como una actividad, entonces ésta incluye el problema y el proceso de resolverlo. Semejantemente, hay una diferencia entre una tarea investigadora y el proceso de hacer una investigación, aunque el proceso de hacer una investigación se puede llamar simplemente como "investigación". Si la investigación se ve como una actividad, entonces ella incluirá la tarea investigadora y el proceso de investigación. Sin embargo, en la educación de las matemáticas, ha habido un cambio en el significado de la palabra "investigación" para referirse a la tarea investigadora en sí misma*. (p. 6).

Como se puede observar en el párrafo anterior, cuando se profundiza en el análisis del significado de los términos, la complejidad y las dificultades aumentan de una manera significativa.

Un último ejemplo ilustrativo puede ser la reflexión de Orton y Frobisher (1996) cuando, a propósito de la diferencia entre la resolución de un problema y una investigación, plantean retóricamente:

> *¿Les pregunta usted a sus estudiantes que resuelvan una investigación? ¿Hace mucho tiempo que usted le planteó a sus estudiantes explorar o investigar un problema? (p. 32).*

Unos años más tarde, Yeo y Yeap (2009) recogen estos interrogantes y plantean sendas respuestas:

> *... ¿les pregunta usted a sus estudiantes que resuelvan una investigación? Sí, si esto significa resolver un problema específico que aparece durante la actividad investigadora explícita. ¿Hace mucho tiempo que usted le planteó a sus estudiantes explorar o investigar un problema? Sí, cabe investigar un problema si esto quiere decir que los estudiantes plantean un problema específico y luego lo tratan de resolver usando el proceso de investigación. (p. 6).*

Como puede observarse en el párrafo anterior, son muchas los interrogantes que pueden plantearse y las respuestas no son sencillas; de ahí que la complejidad del tema haga que, la mayoría de las veces, el profesor se desanime a plantear estas tareas en el aula. En cualquier caso, esto es un problema para la investigación en educación matemática, como plantea Yeo (2008):

> *Los profesores no están listos para enseñar la investigación matemática porque la mayor parte de ellos mismos no saben cómo ni lo que hay que investigar. Se necesitan muchos trabajos para estudiar la naturaleza de los procesos de pensamiento que se ponen en práctica en las investigaciones matemáticas, para poder diseñar un programa de enseñanza conveniente que oriente a los estudiantes para investigar con eficacia. Para ello los profesores tendrán que ser formados sobre cómo poner en práctica este programa con éxito para sus estudiantes.* (Yeo, 2008, p. 618).

Las afirmaciones anteriores refuerza la necesidad de llevar a cabo trabajos de investigación sobre el tema y justifica la realización de esta investigación de tesis doctoral.

Las tareas que conllevan procesos de investigación generan incertidumbre en el profesor

Las actividades que conllevan procesos de investigación se caracterizan porque, en ellas: a) *la meta no está clara* (Orton y Frobisher, 1996) en el sentido de que *la meta está abierta, ya* que son los estudiantes lo que se plantean y eligen el problema o problemas de investigación (Cai y Cifarelli, 2005); b) también *es abierto el proceso*, en el sentido de que los enfoques y líneas de trabajo para la resolución del problema son abiertas y decididas por el estudiante (Delaney, 1996; Pirie, 1987); c) *los resultados también están abiertos* (Bailey, 2007). Como se deduce de lo anterior, el estudiante tiene un protagonismo importante en la toma de decisiones, y éstas repercuten después en el profesor, que se ve afectado por ellas. Estas circunstancias hacen que el profesor no tenga un control absoluto de las situaciones que se dan en el desarrollo de una investigación (aparición de problemas inesperados y desconocidos para él, uso de conocimientos matemáticos en los que él se siente inseguro, que no le gustan, etc.), lo que, a veces, puede generar inseguridad en el profesor, sobre todo en las primeras experiencias de este tipo. Hay, por tanto, una convivencia obligada del profesor con la incertidumbre, en menor o mayor grado. Para evitar esto, una salida es no plantear este tipo de tareas.

En otro orden de cosas, juega un importante papel el marco epistémico y didáctico de los conocimientos del profesor. A este respecto, se hará uso del modelo MTSK del conocimiento especializado del profesor (Carrillo y otros, 2013) como apoyo para la identificación de los cambios que se pueden producir en alguno de los subdominios de conocimientos del profesor.

Otras circunstancias extracurriculares

Para la resolución de tareas cerradas (ejercicios de aplicación directa de los contenidos), en los que la implicación personal del profesor es casi nula, las circunstancias personales o laborales no tienen ninguna influencia. En cambio, para el planteamiento de actividades investigadoras), que son de mayor duración, exigen planificación previa, trabajo suplementario y no reconocido, es necesaria una mayor implicación personal del profesor para la coordinación del proceso, orientación del estudiante y consecución de los objetivos. Además, las condiciones laborales actuales: rebaja de sueldos, aumento en el número de horas lectivas, congelación salarial desde hace bastantes años, recortes en recursos y medios materiales y humanos, no facilitan ni animan a que el profesor esté dispuesto a hacer un esfuerzo suplementario, necesario para llevar a cabo estos tipos de tareas. Eso sin contar las situaciones personales, que también pueden incidir en ello.

1.1.4. El estudiante ante los proyectos de investigación matemática

En primer lugar se comenzará recordando las características de las tareas investigadoras, en relación con los estudiantes. Orton y Frobisher (1996) consolidaron la idea de que una tarea investigadora debe ser abierta; es decir, el profesor no concreta el problema o problemas para que los estudiantes investiguen y los resuelvan. Son los estudiantes los que deben plantear sus propios problemas, a semejanza de la vida real, donde nadie les dice a las personas cuáles son los problemas y cómo delimitarlos. Esto permite a los estudiantes una mayor implicación y responsabilidad, de manera que estarán más interesados en el planteamiento del problema y en la búsqueda de las soluciones. Por tanto la investigación matemática comprende el problema de investigación (que se presenta inicialmente) y el proceso de resolverlo. Ernest (1991) describió el proceso de resolución del problema de investigación como *arrastrar la llama a una localización deseada* (p. 285). Pirie (1987) plantea que la investigación es como la exploración de una tierra desconocida donde *la meta está en el viaje, no en el destino* (p. 2). Por todo ello, hay una diferencia clara entre la resolución de problemas y las investigaciones: la resolución de un problema tiene una meta y una respuesta bien definidas y es una actividad convergente, mientras que la investigación es una actividad divergente con una meta y una respuesta abiertas (Evans, 1987). Brenner y Moschkovich (2002) plantearon la realización de tareas investigadoras que emularan la actividad de los matemáticos profesionales, de forma que los estudiantes pudieran implicarse en actividades matemáticas ricas, poniendo en práctica procesos mentales similares a los que ponen en práctica los matemáticos; es decir, pensar matemáticamente.

Como se ha indicado anteriormente las principales conclusiones del caso paradigmático de la investigación llevada a cabo por Yeo (2008) podrían ser transferidas al contexto español para ilustrar la situación del estudiante ante las tareas investigadora. Yeo (2008) planteó una prueba escrita a 29 estudiantes de secundaria de capacidades altas, escogidos al azar de una de las escuelas superiores de Singapur. La prueba, de lápiz y papel, contenía cuatro tareas investigadoras abiertas, en la primera de las cuales se les proporcionaban algunos problemas o líneas de investigación, para ayudar a los estudiantes que tuvieran dificultades en comprender lo que se les pedía en el enunciado con la palabra investiga. Los temas de las tareas eran aritméticos, que se daba por hecho que todos conocían. Las principales conclusiones fueron las siguientes:

1. Todos los estudiantes participantes en la prueba dijeron que *no habían visto esta clase de tareas investigadoras abiertas antes* (Yeo, 2008, p. 614) y *muchos hicieron comentarios muy negativos sobre la prueba, incluso hasta el punto de odiarla*. (Yeo, 2008, p. 618), por lo que si la prueba se implementa a otras clases de estudiantes, ésta puede hacer que más estudiantes detesten la investigación matemática.

2. Se constató la evidencia *anecdótica* de que *muchos profesores y estudiantes no sabían comenzar cuando estaban frente a tales tareas abiertas* (Yeo, 2008, p. 614).

3. A los 5 minutos del comienzo de la prueba escrita, *5 estudiantes levantaron su mano y preguntaron lo que se supone que debían hacer en la primera tarea de la investigación*, precisamente en la que se les proporcionaban algunos de los posibles problemas para investigar. *Algunos estudiantes no conocían qué hacer y no preguntaron.* (Yeo, 2008, p. 614).

4. La mayor parte de los estudiantes de las altas capacidades no supieron cómo ni lo que debían investigar. *El problema primero es la falta de habilidad de los estudiantes para plantear sus propios problemas para investigar. En general se les plantean problemas para resolver, pero nunca se les pide que presenten y planteen ellos los problemas* (Yeo, 2008, p. 614); de ahí que, cuando se les pide, no saben qué hacer.

5. *La ausencia de una meta específica y la dificultad para entender lo que significa investigar les han causado mucha confusión*. Aunque en la primera tarea se les pedía explícitamente que *buscaran tantos patrones como fuera posible para las potencias de 9, muchos de ellos no entendían lo que significaba buscar patrones* (Yeo, 2008, p. 618).

6. *De entre los pocos estudiantes que hicieron algunas conjeturas no triviales e igualmente los que hicieron conjeturas triviales observando algunos patrones, bastantes de ellos no intentaron probar sus conjeturas sino que concluyeron que ésos eran los patrones subyacentes basándose en algunos datos empíricos y, para algunos de ellos resultó que algunas de estas hipótesis eran falsas.* (Yeo, 2008, p. 618).

7. *El estado actual de la capacidad para llevar a cabo investigaciones matemáticas abiertas entre los estudiantes de Singapur es muy bajo. Si la mayoría de los estudiantes de altas capacidades fallaron gravemente, es imposible que los de bajas capacidades o los estudiantes medios sepan lo que puede ser investigar y cómo hacerlo, salvo algunas excepciones.* (Yeo, 2008, p. 618). Esta conclusión es trasladable al contexto español, cuya situación puede ser peor incluso.

En resumen, el profesorado y el alumnado tienen unas graves deficiencias en relación con las tareas investigadoras. Esta situación se agrava aún más si se tiene en cuenta que el currículo oficial (que, por otra parte, es de obligado cumplimiento) hace mucho hincapié en la realización de tales tareas en todos los niveles educativos y con todos los estudiantes, cada uno con sus posibilidades. De ahí que sea pertinente y esté plenamente justificada esta investigación de tesis doctoral.

1.2. Antecedentes de la investigación

La investigación que se presenta tiene unos antecedentes académicos que se presentan en el Marco teórico (cfr. Capítulo 3) y también unos antecedentes personales que son los que se van a exponer en este apartado.

Quien escribe, con una experiencia docente de más de 30 años, ha desarrollado su trabajo profesional, durante los últimos 17 años, en un Instituto de Educación Secundaria que tiene implantado desde hace más de 30 años el programa del Diploma del Bachillerato Internacional (B.I.), siendo el segundo centro público español con más antigüedad en el programa. Así mismo, en los últimos 15 años ha impartido la materia de Matemáticas Nivel Superior, en la que los estudiantes deben realizar obligatoriamente, tareas que conllevan el desarrollo de investigaciones y, en la materia que ellos elijan, un proyecto de investigación, denominado por la organización del B.I. *la monografía*. Como consecuencia de ello, ha coordinado una media de 12 tareas de investigación cada curso, de manera ininterrumpida, hasta la actualidad y entre una y dos *monografías* de matemáticas por curso, conservando todos los documentos borradores y definitivos de los mismos. Este proceso puede considerarse como una experimentación previa desarrollada en varios años, sobre el tema de investigación.

Fruto de todo ello han sido los premios y menciones obtenidos por sus estudiantes en diferentes certámenes: Premios a trabajos de inicio a la investigación (Universidad de Burgos), Certamen de Jóvenes Investigadores de España (Instituto de la Juventud de España), Premios de matemáticas para estudiantes de Secundaria (Universidad Autónoma de Madrid); así como selección y participación en varias expociencias internacionales: Expociencia internacional en Guadajara (México); Expociencia internacional en Bratislava (Eslovaquia) y Expociencia internacional en Cillina (Eslovaquia). Como colofón, el Instituto de la Juventud de España, en la XXVII edición del Certamen de Jóvenes Investigadores de España (año 2014) le concedió una mención de honor por su destacada labor en el fomento de la investigación científica y tecnológica entre los jóvenes.

Esta larga experiencia personal y profesional, en la coordinación y dirección de trabajos y proyectos de investigación de matemáticas con estudiantes de ESO y Bachillerato, ha propiciado una reflexión profunda sobre los proyectos de investigación matemática (PIM) y sobre las tareas investigadoras a lo largo de los últimos diez años. Esta reflexión se ha sustentado en las experiencias de innovación y experimentaciones previas al planteamiento de la realización de esta tesis doctoral y ha tenido sus frutos en los múltiples artículos publicados en las principales revistas nacionales dedicadas a la educación matemática y su didáctica, ponencias en congresos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los que se han presentado diferentes resultados obtenidos en las experiencias llevadas a cabo.

Por otra parte, la experiencia personal ha propiciado que, en la investigación llevada a cabo, se haya sistematizado el trabajo, se hayan formulado preguntas y se haya reflexionado científicamente sobre el cómo abordar este tipo de tareas con estudiantes de Bachillerato, para poder ofrecer los resultados y conclusiones a la Comunidad. El trabajo de esta tesis, antes de reflejar la complejidad y las complicaciones del tema, se basa en la experimentación a lo largo de repetidas experiencias, que han permitido aflorar lo valioso de este tipo de trabajos tanto para el alumno como para el profesor. Esta es la principal causa para embarcarse en el complicado proceso de estudio que requiere una investigación de tesis; no es la atracción por su complejidad, sino el profundizar en experiencias consideradas como muy valiosas, personal y profesionalmente, que merecen ser documentadas, estudiadas y comunicadas.

En cuanto a las características de estas tareas, entre las que destacan el carácter problemático y su complejidad, constatados de manera continuada en las experiencias y trabajos de los últimos diez años, se pueden concretar en las siguientes reflexiones personales:

1. Los proyectos de investigación matemáticas (PIM) son, de entre todas las tareas matemáticas que se pueden abordar en el aula con los estudiantes, los que tienen una estructura más compleja: por las diferentes fases, por la cantidad de competencias matemáticas que desarrollan, por la cantidad y variedad de actividades que conllevan, por su duración, por el papel que deben asumir el profesor y el estudiante, por las dificultades que se presentan, etc.

2. Las tareas que conllevan investigación de los estudiantes, por ejemplo los PIM, son poco habituales en el aula y sorprenden a los estudiantes por su falta de experiencia previa en ellas, Por otra parte, son un tipo de tareas que, hasta la actualidad, ha sido muy poco estudiadas por los investigadores en educación matemática. Así como hay abundantes referencias bibliográficas sobre aspectos parciales de una investigación matemática: la demostración, la generalización, así como otros procesos mentales que se ponen en práctica, habitualmente en los PIM; por el contrario, son muy escasas las investigaciones que tratan como objeto de estudio los PIM considerados en su unicidad y entidad global. Actualmente se están dando pasos en la explicación de su compleja estructura y de los procesos mentales que los estudiantes ponen en práctica durante su desarrollo.

3. Los PIM son las experiencias de aprendizaje que más huellas positivas dejan en los estudiantes a su paso por la Educación Secundaria. En primer lugar porque el

estudiante es el principal protagonista en la toma de decisiones sobre los distintos aspectos del PIM (tema de trabajo, problema de investigación, enfoque del trabajo, conclusiones, reflexiones personales, etc.). En segundo lugar porque la elaboración del informe científico sobre el proceso y los resultados y conclusiones, que obliga a abordar aspectos de fundamentación del PIM (motivación y justificación, objetivos, estado de la cuestión, metodología, etc.) conlleva un nivel de profundidad en la reflexión y el análisis no realizados nunca antes por el estudiante. Hay que tener en cuenta que casi todos los estudiantes se enfrentan por primera vez con este tipo de tareas (como los estudiantes de la experiencia de presentada en el apartado anterior, en el contexto de Singapur).

4. El informe científico del estudiante en un documento con una rigurosa estructura, que recoge todo el proceso, junto con sus reflexiones sobre diferentes aspectos teóricos y prácticos del PIM, es un recurso valiosísimo para el profesor. El análisis del informe proporciona datos muy fiables sobre múltiples aspectos del estudiante (implícitos y explícitos): conocimientos, esquemas mentales, dificultades encontradas, puntos fuertes y débiles del trabajo realizado, etc.; y también proporcionar información para el profesor sobre sus conocimientos de contenido y didácticos de contenido, para evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

5. Los PIM constituyen un buen recurso para acercar a los estudiantes al proceso de creación y descubrimiento en matemáticas, ya que los procesos mentales que se ponen en práctica en el desarrollo de un PIM suelen ser los habituales en el proceso de descubrimiento y creación (particularizar, abstraer y generalizar, conjeturar, demostrar, uso de la analogía, razonamiento lógico deductivo, inductivo, abductivo, etc.)

6. Los PIM son una forma muy eficaz para que los estudiantes conozcan el verdadero rostro de las matemáticas ya que proporcionan una visión muy realista de los métodos de trabajo y de las tareas que abordan los matemáticos profesionales en su práctica diaria.

7. Los PIM pueden ser una fuente de conocimientos didácticos del contenido matemático para el profesor y, según las características y peculiaridades del PIM, una fuente de conocimientos del contenido matemático. El análisis de los borradores de los estudiantes sirven para identificar las actividades más eficaces del estudiante, las dificultades que tiene, de las cuales puede no ser consciente. Las acertadas orientaciones que proponga el profesor reforzarán o pasarán a formar parte de sus conocimientos didácticos del contenido matemático. En cuanto a que los PIM puedan servir para incrementar el caudal de conocimientos matemáticos del profesor, baste poner un ejemplo: si un estudiante acude al profesor y le plantea algo parecido a esto: “me gustaría hacer un trabajo de investigación sobre el *número plástico*, que he leído que es el análogo al número áureo, pero para construcciones tridimensionales”, o esto otro: “he oído que hay unas curvas matemáticas que sirven para el diseño gráfico de objetos, letras, etc., que se llaman las *curvas de Bezier* y otras *splines.* Me gustaría hacer un trabajo sobre

ellas". Esto obliga al profesor a estudiar unas nociones, aunque sean mínimas, sobre esos contenidos matemáticos.

1.3. El Problema de investigación

Se presenta, a continuación el problema que se va a tratar en esta investigación de tesis doctoral, con las correspondientes preguntas concretas que lo delimitan:

1. Los PIM, en el contexto de la Educación Secundaria, son tareas matemáticas que tienen entidad e identidad propia, aunque algunas de sus características son comunes a otras tareas matemáticas escolares.

1.1. ¿Se pueden definir de forma eficaz, diferenciándolos de otras tareas matemáticas?

1.2. ¿Se puede caracterizar su estructura (fases y tareas principales)?

1.3. ¿Se puede caracterizar el proceso de obtención del problema de investigación de un PIM, por extensión de una tarea de resolución de problemas? ¿Qué invariantes operacionales, de los esquemas mentales de los estudiantes, se identifican como característicos de ese proceso?

2. En el desarrollo de determinados PIM, los procesos mentales más habituales que el estudiante pone en práctica son los de particularizar, generalizar, conjeturar, justificar y el uso de la analogía.

2.1. ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la solución del problema de investigación (que puede ser una prueba, demostración, la existencia o verificación de un resultado, etc.)?

2.2. ¿La analogía funciona como un catalizador en los procesos de abstracción y búsqueda de generalizaciones? ¿Qué papel juega la analogía en estos procesos?

3. El profesor se sitúa, en el desarrollo del PIM y en la revisión del informe científico del estudiante, con sus conocimientos de contenido y didácticos de contenido. En algunos casos, además, el propio profesor elabora un informe sobre el PIM desarrollado por los estudiantes, analizando el desarrollo del mismo.

3.1. ¿Pueden modificarse los conocimientos del profesor en el análisis de un PIM? ¿Qué tipo de modificaciones se pueden producir?

Una vez delimitado el problema con las preguntas de investigación, se hará la presentación de los objetivos de la investigación.

1.4. Objetivos de la investigación

La finalidad principal de esta investigación es la caracterización de los proyectos de investigación matemática con estudiantes de Bachillerato, explicitando un modelo tanto en sus componentes matemáticas y en la mediación del profesor. .

Los objetivos concretos de la investigación están relacionados con las preguntas del problema de investigación y se concretan en los siguientes:

> OBJ1. Clarificar el concepto y la estructura de un PIM, distinguiéndolo de otras tareas que conllevan la realización de una investigación matemática en el contexto escolar.
>
> OBJ2. Establecer conexiones entre las tareas de resolución de problemas y los PIM, a través de la caracterización del proceso de obtención de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas.
>
> OBJ3. Profundizar en el estudio del papel que juegan algunos procesos matemáticos, que pone en práctica el estudiante en el desarrollo de un PIM, para la resolución del problema de investigación.
>
> OBJ4. Ejemplificar la utilidad de los PIM para producir cambios en los conocimientos del profesor.

1.5. El papel de la teoría en esta investigación

Las reflexiones anteriores, presentadas en el punto *1.2. Antecedentes de la investigación*, han sido extraídas de experiencias prácticas innovadoras y de la experimentación reiterada con los estudiantes, pero adolecen de falta de fundamentación que las refuerce y consolide y, por otra parte, las valide científicamente. Para llenar ese vacío se necesita un verdadero marco teórico fundamentado, del que se pueda hacer uso en las experimentaciones y en el análisis de las producciones de los estudiantes.

Pero la motivación real de este trabajo de investigación no es aportar conocimientos nuevos a la teoría ni tampoco crear teoría nueva. En la investigación llevada a cabo, la teoría es un instrumento que ayuda en la tarea de sistematizar, de manera rigurosa y con métodos científicos, las experiencias. De ahí que el marco teórico se presente después del problema de investigación y sus preguntas; es decir, las preguntas son el punto de partida, el detonante del trabajo, la teoría es la herramienta elegida (que se hubiera quizá podido elegir otra) que permite llevar a cabo un tratamiento sistemático de las experimentaciones llevadas a cabo, para la obtención de resultados.

A continuación se presenta un resumen de las principales ideas del marco teórico que servirá de apoyo en la investigación.

El marco teórico, desarrollado en el Capítulo 3, se sitúa en la *Teoría de la Actividad* y, dentro de ella, el modelo que proporcionan las *actividades mediadas por un instrumento* (compuesto de *artefacto y esquema)* (Capítulo3, punto 3.2.1). En el proceso (*Génesis Instrumental y Documental*) de transformación del *recurso* (las producciones de los estudiantes: borradores e informe científico final) en *documento* (Capítulo 3, puntos 3.3 y 3.4), se dan:

- *Mediaciones* entre los tres entes que intervienen en la actividad (*sujeto, objeto* y *otros sujetos*) a través del instrumento. Éstas *mediaciones* pueden ser de tres tipos: *epistémicas, pragmáticas y heurísticas*. Todas ellas se adaptan muy bien al

tipo de situaciones que se dan en el desarrollo de un proyecto de investigación matemática (PIM) (Capítulo 3, punto 3.2.1).
- Dos funciones muy importantes: a) la *función productiva* (*instrumentalización*), que se dirige desde el sujeto (profesor) al recurso. Esta función permite al sujeto conocer a fondo el recurso, utilizarlo, mejorarlo y adaptarlo en función de las metas a conseguir; b) la *función constructiva (instrumentación)* que va del recurso hacia el sujeto, de manera que el recurso puede modificar al sujeto; es decir, que los conocimientos del profesor son cuestionados en la puesta en práctica del recurso y por los efectos que conlleva (Capítulo 3, punto 3.4.3).
- Diferentes *niveles de organización entre instrumentos y situaciones*: a) las situaciones con características suficientemente similares, por las tareas a realizar, se pueden agrupar, dando lugar a *clases de situaciones*. Estas *clases* tienen asociadas instrumentos adaptados a las peculiaridades de cada una de ellas y dan lugar a modalidades de actividad que son relativamente estables para la misma *clase* y diferenciadas de una *clase* a otra; b) las *clases de situaciones* pueden organizarse en una agrupación de nivel superior, constituyendo las *familias de actividad.* Estas *familias* reúnen y organizan todas las clases de situaciones que corresponden a un mismo tipo de finalidad general de la actividad. En este nivel, puede haber *clases de situaciones* que pertenezcan a más de una *familia de actividad; c) e*l conjunto de todas las *familias de actividad* constituyen un tercer nivel de organización y análisis, que se denomina *Dominio o Ámbito profesional de la actividad.* Este *dominio* incluye todas las *familias de actividad* junto con las *clases de situaciones* que las componen y para cada uno existen los correspondientes grupos de *instrumentos* (Capítulo 3, punto 3.3.1).

Todas estas ideas se presentan pormenorizadamente en el Capítulo 3 de esta tesis.

A este respecto, hay que señalar que los documentos que se presentan en los anexos de la tesis son los informes finales de los PIM realizados por los estudiantes. Los análisis realizados, sobre los episodios seleccionados de cada uno de esos documentos, han permitido identificar los niveles de organización entre el recurso (el informe del estudiante) y las situaciones (actividades que realiza). Así mismo se han identificado los invariantes operacionales de los esquemas del instrumento.

En este proceso de análisis sucesivo de los episodios que componen el recurso (informe del estudiante), es donde se producen las mediaciones (epistémicas, pragmáticas y heurísticas) y, simultáneamente, tienen lugar las dos funciones de la Génesis Documental, la función constructiva y la función productiva, entre el recurso y el profesor-investigador. Fruto de estas interacciones:

1. El recurso (informe del estudiante) se va transformando en el *documento* (recurso + esquema asociado), un instrumento de alto valor didáctico para el profesor.

2. El profesor se va cuestionando aspectos de su marco de conocimientos y se va transformando como profesor.

En la tesis hay un caso de Génesis Documental que se va dando en el transcurso del tiempo; concretamente, en cada una de las tres experimentaciones llevadas a cabo. Este caso es el relativo a los tres PIM realizados por los estudiantes con el tema común de las tablas bidimensionales cuyas filas y columnas forman progresiones aritméticas. Estos PIM son analizados en los puntos 5.5., 6.2, 6.3 y 7.3 de la tesis. La Génesis Documental es tan fructífera que al final del proceso, los distintos recursos analizados han generado, para el profesor, un *Documento* consistente en una verdadera teoría matemática de conocimientos nuevos que generaliza el concepto de progresión aritmética tradicional. Este *Documento,* generado a partir de los recursos (informes de los estudiantes) no es la suma de los tres, sino que contiene además el esquema asociado, que se genera en la mente del profesor, que le confiere un valor didáctico incalculable para el profesor.

En cuanto al proceso de contextualización del marco teórico, (cfr. Capítulo 4) se han planteado varios casos de *actividades mediadas por un instrumento*, en función de la experimentación en la que se utiliza y de la *mediación* que se prioriza. Estos casos permiten identificar las *clases de situaciones, familias de actividad* y los *dominios o ámbitos profesionales de la actividad*, y hacer explícitos los *invariantes operacionales* o *conocimientos en acción* de los *esquemas* del *instrumento.*

1.6. Metodología de la investigación

El camino, desde el planteamiento del problema hasta la obtención de los resultados, se articula en varias fases que se resumen a continuación:

1. Trabajo exploratorio. Antes de entrar en el proceso de experimentación se llevó a cabo un trabajo exploratorio previo en el que, mediante el desarrollo de varios PIM con estudiantes, se reflexionó sobre: a) la complejidad del tema y la pertinencia de llevar a cabo una investigación sobre el mismo; b) los temas de trabajo a abordar en las experimentaciones posteriores; c) la adecuación del marco teórico en el contexto de la investigación, concretando los casos a estudiar y los tipos de interacción a analizar en cada caso; d) la metodología más adecuada para el marco teórico, su estructura, fases y pasos a dar.

2. Experimentaciones. En la investigación se han llevado a cabo tres experimentaciones sucesivas (cfr. Capítulo 4), una en cada curso escolar, con 5, 6 y 3 estudiantes, de los cuales 12 son de bachillerato y 2 de la Educación Secundaria Obligatoria respectivamente. En la primera, el contenido tratado ha sido la *generación de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas (problem solving)* y las mediciones analizadas han sido las de tipo *pragmático*. En la segunda, el tema de trabajo ha sido el papel de los *ejemplos y contraejemplos en el trabajo con conjeturas y los razonamientos en el proceso de búsqueda de la prueba* o demostración; en este caso las mediaciones priorizadas han sido las *epistémicas*. Por último, en la tercera experimentación, el tema de trabajo ha sido los *cambios que se pueden dar en los conocimientos del profesor* en el desarrollo de un PIM; para ello se han estudiado las mediaciones de tipo *heurístico*. Por otra parte, al menos uno de los PIM de cada experimentación desarrolla el mismo tema o contenido matemático (tablas numéricas cuyas líneas son progresiones aritméticas), aunque el problema de investigación sea diferente en cada caso. Por una parte, estos PIM van dando pasos

en la generación de una teoría alrededor del tema de trabajo, que generaliza las progresiones aritméticas tradicionales y permite, y, por otra, estos PIM constituyen un eje vertebrador común en las sucesivas experimentaciones. En la Tabla 1.2. se resumen los principales aspectos de cada experimentación.

En la Tabla 1.2., los segundos sumandos de la fila nº de sujetos son el número de estudiantes que desarrollaron un PIM con el mismo contenido de trabajo: 1 el primer año, 5 el segundo año y 2 el tercer año (tablas numéricas cuyas líneas son progresiones aritméticas).

EXPERIMENTACIÓN	Nº 1	Nº 2	Nº 3
Nº DE SUJETOS (Estudiantes)	4+1	1+5	1+2
ORIENTACIONES EN LAS MEDIACIONES	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ OBJETO	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ ESTUDIANTES	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ PROFESOR
ELEMENTO PRIORITARIO EN LA MEDIACIÓN	OBJETO-META (PIM)	LOS SUJETOS (ESTUDIANTES)	SUJETO INVESTIGADOR (PROFESOR)
MEDIACIONES PRINCIPALES	PRAGMÁTICAS	EPISTÉMICAS	HEURÍSTICAS

Tabla 1.2. Experimentaciones de la investigación.

1.7. Resultados y conclusiones de la investigación

Los capítulos 5, 6 y 7 de la tesis corresponden a la descripción de los resultados del problema de investigación planteado en el desarrollo de las experimentaciones sucesivas. La síntesis de los resultados, conclusiones y propuestas de futuro se presentan en el capítulo 8.

Es importante señalar que, en el capítulo 6, se ha planteado el análisis, desde el punto de vista de las actividades que llevan a cabo los estudiantes, del papel y los usos de algunos procesos matemáticos útiles para la resolución del problema de investigación de un PIM (concretamente, los ejemplo y contraejemplos en la construcción de una demostración y la analogía en la conexión entre contextos); concretamente el punto 6.2 analiza los ejemplos y contraejemplos y el 6.3 la analogía. El punto de vista adoptado en este capítulo es el del estudiante; es decir, el análisis va del profesor hacia los estudiantes (Figura 4.8. Mediaciones en la Experimentación 2. Caso 1 de las actividades mediadas), las mediaciones priorizadas son de tipo epistémico y los resultados obtenidos se refieren al trabajo de los estudiantes. Ello no es óbice para que los resultados obtenidos por los estudiantes, contenidos en los informes, provoquen en el profesor conflictos cognitivos mediante los cuales se replantee algunos aspectos de su marco de conocimientos, siendo estos aspectos el contenido central del capítulo 7.

En cuanto al capítulo 7, en él se plantea el análisis, desde el punto de vista del profesor, de los recursos (informe del profesor y de los estudiantes). Este análisis permite identificar, mediante la función productiva de la Génesis documental y las mediaciones heurísticas de la actividad mediada, las modificaciones que se producen en los dominios de los conocimientos especializados del profesor, (del contenido matemático y didácticos del contenido matemático). Por tanto, los análisis del capítulo 7 van del profesor y vuelven al profesor (Fig. 4.2. Actividad mediada. Caso 2, de la tesis), las mediaciones priorizadas son las heurísticas y los resultados se refieren al profesor. Esto se lleva a cabo en los puntos 7.2 y 7.3 del documento de la tesis.

Por último, los resultados se agrupan dando respuesta a cada una de las cuestiones de investigación planteadas inicialmente:

1. Concepto de PIM. Definición, estructura y fases. Estructura del informe científico final del estudiante. Tareas de acercamiento a la investigación: los miniPIM,
2. Proceso de generación de un PIM, a partir de una tarea de R.P. Estructura del proceso y procesos mentales del estudiante.
3. Papel de ejemplos y contraejemplos en la elaboración y justificación de las conjeturas. Ejemplos genéricos, patrones de generalización de resultados y de procesos. Razonamientos y patrones de razonamiento plausible
4. La analogía en los procesos de generalización. Usos de la analogía y significado de cada uno de los usos. Relaciones entre la analogía y la generalización.
5. Los cambios en los conocimientos del profesor. Tipos de modificaciones.

El capítulo 8, de conclusiones y propuestas, presenta una serie de reflexiones en relación con: los objetivos de la investigación y el método utilizado, para pasar después a las conclusiones y propuestas didácticas para cada uno de las preguntas planteadas en la investigación. Por último, la tesis finaliza con la enumeración de propuestas para el futuro y una reflexión personal sobre la investigación llevada a cabo.

CAPÍTULO 2. LAS TAREAS MATEMÁTICAS

2. LAS TAREAS MATEMÁTICAS

La abundancia de términos para designar las tareas o actividades matemáticas que se pueden proponer a los estudiantes, entre las que están los proyectos de investigación matemática (PIM) que se van estudiar en este investigación de tesis, requiere una reflexión y aclaración sobre los diferentes términos utilizados en la literatura sobre Educación Matemática, resaltando sus características y singularidades.

En principio, el término *tarea matemática* se refiere a actividades que pueden ser problemas para el estudiante o no. En NCTM (1991, p. 25) se utiliza *tareas matemáticas* en lugar de *problemas matemáticos* y Schoenfeld (1985, p. 74) señala que *contener un problema no es una característica inherente de una tarea matemática*. Como se aclarará más adelante, el que una tarea matemática sea un problema o no, depende de la persona (en este caso del estudiante al que se le plantea) y no tanto de la idea que tenga al respecto el profesor que la propone.

En esta investigación, se utilizará el término tarea matemática para designar cualquier actividad de contenido matemático, que el profesor puede proponer a sus estudiantes. A este respecto, conviene diferenciar entre el término *actividad* en el contexto escolar, de la práctica del aula, y el término *actividad* en el contexto del marco teórico de la investigación, concretamente cuando se habla de la *teoría de la actividad* o en el marco de la *actividad mediada por un instrumento.*

Consideramos primeramente la diferencia entre el término *tarea* y el término *actividad*. Una *tarea* es lo que plantea el profesor y una *actividad* es lo que lleva a cabo el estudiante para dar respuesta a la tarea planteada por el profesor. *El propósito de una tarea es el inicio de una actividad matemática fructífera por los alumnos* (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 25). Por ejemplo, una tarea de resolución de problemas conlleva, para el alumno, una actividad de resolución de problemas con todas sus fases, aunque la resolución del problema sólo abarque algunas de ellas.

2.1. Descripción de tareas

Como la presente investigación se centra en unas tareas (PIM) poco habituales en el aula, conviene reflexionar sobre los distintos tipos de tareas, a la luz de la literatura actual. Para ello, haremos un recorrido utilizando el criterio *ir de lo más cerrado a lo más abierto.* A este respecto, conviene aclarar que las diferenciaciones que se presentan en este capítulo son propuestas que pueden ser asumidas o no por otros. También son puntos de partida que se ha decidido adoptar en base a la experiencia personal y a lo que se ha podido identificar en la literatura, pero no son resultados de la investigación.

2.1.1. Ejercicios

Un ejercicio es una tarea en la que el profesor supone que el estudiante sabe lo que hay que hacer para resolverla. Para Lester (1980, p. 31), el objetivo de la misma es *proporcionar práctica a los estudiantes al usar procedimientos matemáticos estándares (por ejemplo, los algoritmos de cálculo, las transformaciones algebraicas y el uso de fórmulas)*. Habitualmente se plantean como *aplicación directa de los conocimientos aprendidos inmediatamente antes o el día anterior* (Orton y Frobisher, 1996, p. 27). Estos autores los denominan *problemas rutinarios.*

Otra característica de este tipo de tareas es que abundan en los libros de texto; por ejemplo:

Tarea 1: *Calcular el vector que une los puntos del plano A(1, 1) y B(-1, 3)*

Antes de continuar, debemos señalar algunas salvedades con respecto a la tarea anterior: a) en el caso de estudiantes a los que no se les han enseñado los conocimientos necesarios para resolverla, el ejercicio puede ser un problema; b) si se plantea a un estudiante con dificultades de aprendizaje, puede haber acabado de aprenderlo y no saber aplicarlo adecuadamente; c) si es un estudiante que no practica este tipo de tareas, comunes en los libros de texto, pueden no ser rutinarias para él. A este respecto, Yeo (2007) utiliza el término *tareas familiares o no familiares* cuando desea indicar si las tareas resultan conocidas o desconocidas al estudiante, y también *práctica rutinaria,* dando a entender que la tarea es de rutina para el estudiante que la lleva a cabo.

En el caso concreto de la tarea 1, lo habitual es plantearla para que el estudiante aplique la fórmula dada en clase, que representa el procedimiento más rápido para calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Por tanto es una *tarea rutinaria.*

2.1.2. Problemas

Una de las tareas que más nombran los profesores de matemáticas es la de *problema.* Henderson y Pringy (1953) plantean que, para una persona concreta, una situación es un problema cuando se dan las tres condiciones siguientes (Henderson y Pringy, 1953, p. 230):

> *1. El individuo tiene una meta bien definida de la que está enterado de forma consciente y desea lograrla.*
>
> *2. Existe un bloqueo en el camino hacia la meta y los patrones de comportamiento del individuo o las respuestas habituales no son suficientes para eliminar el bloqueo.*
>
> *3. Se da un proceso deliberado. El individuo está enterado del problema, lo define más o menos claramente, identifica las hipótesis posibles (soluciones) y prueba la viabilidad de éstas.*

Analizando las ideas anteriores, se puede observar, en primer lugar, que una tarea puede o no ser un problema en función de lo que decida, a propósito de las tres condiciones, la persona que debe resolverlo.

La primera de las condiciones se concreta en tres ideas: la situación tiene una *meta bien definida*, la persona es *consciente de ella* y, por último, *desea conseguirla*. A este respecto, Lester (1980, p. 30) interpretó que el significado de *desea lograrla* es que la persona debe *estar interesada en la resolución de la situación.*

En cuanto a la segunda condición, Reys y otros (2004, p. 115) observaron que la superación del *bloqueo en el camino hacia la meta* lleva consigo *cierto esfuerzo creativo y pensamiento de alto nivel*. Visto desde otro punto de vista, como el pensamiento matemático de alto nivel está bastante desligado del cálculo algorítmico, Schoenfeld

(1985, p. 74) señala que la *dificultad debe ser un callejón intelectual sin salida más bien que* [una dificultad] *de cálculo.*

Por último, la tercera condición se puede resumir diciendo que hay un *intento deliberado* de buscar y encontrar una solución por parte del resolutor (Lester, 1980). Esto requiere una cierta implicación de la persona en la tarea, por lo que se deben presentar algunos de los *estados emocionales* planteados por Mason, Burton y Stacey (1982, p. 129 de la edición española (1989)), al menos el de *primeros contactos* que es *el momento de hacerse una idea global del problema, de enterarse de lo que realmente se pregunta y de familiarizarse con los detalles*, y el de *entrando en materia* cuyo objetivo es *hacerse plenamente con el problema, extraer todo tipo de significados y relaciones, de manera que el problema acabe por salir de la página en la que está escrito y penetre en ti mismo. Solo así el problema se convierte en tu propio problema* (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 131 de la edición española (1989)).

Desde el punto de vista del profesor, Henderson y Pringy (1953) consideran que una tarea propuesta en el aula será un problema si la dificultad de la tarea es aceptable para el alumno medio de la clase y si el alumno no puede encontrar directamente la solución.

En cualquier caso, el término *problema* admite diferentes acepciones; por ejemplo, en los siguientes enunciados:

Tarea 2: *Calcular el área del triángulo que forma la recta 2x-y+6=0 con los ejes de coordenadas.*
Tarea 3A: *En el número irracional 0,10100100010000... , averiguar el valor de la cifra que ocupa el lugar 4006º en el desarrollo decimal del número.*

Como se puede observar, la **tarea 2,** que es común en los libros de texto escolares, requiere una planificación de los pasos a dar para llegar a la solución (cálculo de los puntos de intersección de la recta con los ejes y cálculo del área del triángulo aplicando la fórmula tradicional), aunque este proceso no es único; por ejemplo podría escribirse la ecuación de la recta en forma segmentaria $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1$, a continuación reconocer que la base y la altura del triángulo son 3 y 6 respectivamente y calcular el área del triángulo. En cualquier caso, la resolución del problema exige un procedimiento no directo, con varios pasos, y podría convertirse en un ejercicio rutinario con un poco de práctica por parte del estudiante.

En cuanto a la **tarea 3A**, no hay un procedimiento directo para resolverla (como en la tarea 1), requiere un plan estructurado con varios pasos (como en la tarea 2) y, esto es lo característico de ella: el estudiante debe poner en práctica alguna estrategia de *resolución de problemas* (*problem-solving*) como puede ser *particularizar y buscar patrones matemáticos*. Yeo (2007) denomina *tareas procesuales* a las tareas 1 y 2, puesto que conllevan la práctica de procedimientos y *tareas de resolución de problemas* a la tarea 3, que requiere el uso de alguna estrategia de resolución de problemas para resolverla. En este último caso, es necesario aclarar que en las *tareas de resolución de problemas* se está suponiendo que la tarea es un *problem*a para el estudiante, en el sentido de Henderson y Pringy (1953) descrito más arriba, aunque haya casos en que podría no ser así.

De una manera natural, ha aparecido el término *resolución de problemas (problema solving)*, conectado al término *problema*, aunque sus significados sean diferentes. Yeo, (2007) aclara la diferencia entre ellos: *problema se refiere a una situación que sea problemática para una persona y, en el aula, ésta* [la situación] *implica generalmente una tarea dada, mientras que resolución de problemas se refiere al proceso de resolver el problema. Si se considera la resolución de problema como actividad, entonces esto incluye el problema y el proceso de solucionarlo* (Yeo, 2007, p. 7).

2.1.3. Resolución de Problemas (problem solving)

La resolución de problemas de matemáticas, como proceso ligado a la heurística, surge a mediados del siglo XX con las obras de Polya (1945, 1962-1965, 1966) y continúa con Mason, Burton, Stacey (1982), Schoenfeld (1985) y Guzmán, (1991).

Polya plantea el modelo de las cuatro fases: *Comprensión del enunciado, Concepción de un plan, Puesta en práctica del plan* y *Visión retrospectiva*; así como los principales recursos para avanzar en el proceso de resolución de problemas: las *estrategias heurísticas*, las *sugerencias heurísticas* y los *patrones de razonamiento plausible.*

Mason, Burton y Stacey (1982) plantean la idea de *pensar matemáticamente.* La estructura del proceso de resolución de problemas se concreta en tres fases: *Entrada, Ataque, Revisión-Extensión.* Los principales procesos mentales que se ponen en práctica son: *particularizar, generalizar, conjeturar, justificar.* También:

a) hacen explícitos los mecanismos de control para la toma de decisiones, a través de lo que denominan *monitor interno*;

b) establecen conexiones entre el proceso de resolución de problemas y el proceso de enseñanza y aprendizaje, mediante el análisis de *protocolos de resolución* y el uso del *rotulado personal*;

c) buscan conexiones entre el proceso de resolución de problemas y los aspectos psicológicos que muestra el resolutor en el proceso de resolución: los *estados emocionales o psicológicos* (*primeros contactos, entrando en materia,..., estado contemplativo)*.

Guzmán (1991) plantea un modelo de resolución de problemas en grupo, con cuatro fases, similar al de Polya, pero introduciendo algunas herramientas propias del trabajo en grupo: el *brainstorming* o *tormenta de ideas* para la generación y selección de ideas y estrategias heurísticas. También establece algunas conexiones entre el proceso de resolución de problemas y el proceso de descubrimiento y creación en matemáticas: el *papel del subconsciente*; y profundiza en la última de las fases del proceso, *la vuelta atrás* o *visión retrospectiva*, planteando la idea del *autorretrato heurístico.*

Todos los autores anteriores plantean la profundización en la última de las fases que proponen los modelos anteriores de resolución de problemas: *Visión Retrospectiva* de Polya, *Revisión-Extensión* de Mason, Burton y Stacey y la *Revisión del proceso y extracción de conclusiones* de Guzmán. Por ejemplo, Polya (1945, p. 19 de edición castellana (1965)) propone las siguientes sugerencias para esa fase: *¿puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado de otra forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?*. También Guzmán

(1991, p. 142) propone que *la reflexión sobre el proceso debe realizarse desde dos perspectivas distintas, una local referida al problema concreto y otra más general, global y profunda, que trate de ir más al fondo, examinando* [...] *tus posibles progresos hacia la meta que consiste en mejorar tu propia forma de proceder.* A este respecto, centrándonos en la reflexión local, propone concentrarse en las dos actividades siguientes (Guzmán, 1991, p. 143):

> *Examina el camino seguido. ¿Cuáles han sido los cambios de rumbo en el tratamiento del problema? ¿Qué es lo que los ha motivado? ¿Te acercaste a las estrategias correctas? ¿En qué momentos y por qué? [...] ¿Cómo se originaron las ideas que más contribuyeron o más te acercaron a la solución?*
>
> *Extrae más provecho de este problema. Trata de entender no solo que la solución es válida, sino también por qué los elementos de la solución se compenetran del modo que lo hacen para llegar a la solución. Mira si todo ello se puede hacer de manera más simple. Esto te capacitará para llegar a ser capaz de resolver problemas semejantes y más difíciles. Explora hasta dónde dan de sí las ideas que han surgido, los resultados obtenidos, los métodos utilizados. Los problemas resueltos, cuando son de cierta riqueza, dan siempre lugar a muchas más preguntas interesantes [...] expandiendo los problemas hacia situaciones más generales, lo que muy comúnmente se puede hacer en direcciones diversas.*

Se tiene que, en tareas de resolución de problemas (problem-solving), el trabajo en la última fase del proceso, sobre todo en lo referente a la búsqueda de nuevos métodos de encontrar la solución, permite *abrir* la tarea. Frobisher (1994, p. 158) atribuyó *la apertura al método de encontrar la solución, no a la solución*. Becker y Shimada (1997, p. 1) estudiaron los *problemas ampliables* en los que pedían a los estudiantes *centrar su trabajo en desarrollar diversos métodos, maneras, o acercamientos para conseguir una respuesta a un problema dado y no sólo en encontrar la respuesta al problema*. Esto conlleva que en cada uno de los métodos que encuentren se ponen en práctica diferentes estrategias, no diferentes procedimientos algorítmicos *procesuales*. Sheffield, Meissner y Foong (2004) llaman *tareas semiabiertas* a este tipo de tareas, en las que lo abierto es el método o camino para llegar a la solución del problema.

Por otra parte, si se fija la atención en la solución o respuesta del problema, Becker y Shimada (1997) trabajaron con tareas en las que había muchas respuestas correctas. Ellos mismos proponen la actividad siguiente (Becker y Shimada, 1997, p. 10):

Tarea 4: *Un frasco transparente en forma de un prisma rectangular recto está parcialmente lleno de agua. Cuando el frasco se coloca en una tabla inclinada, con un borde fijo, el agua adopta diferentes formas geométricas de varios tamaños, en las caras del paralelepípedo. Las formas y los tamaños pueden variar con el ángulo de inclinación. Intente descubrir tantas reglas de variación, para estas formas y tamaños, como sea posible. Anote los resultados del estudio.*

Como se ve, en esta tarea la respuesta está abierta porque hay más de una respuesta correcta. También se puede decir que la meta de la tarea está mal definida, porque no se pueden encontrar todas las respuestas posibles correctas. Becker y Shimada (1997) llamaron a este tipo de tareas *problemas ampliables* (Becker y Shimada, 1997, p. 1).

No se debe confundir *muchas respuestas correctas* con *respuestas múltiples* (Chow, 2004). Por ejemplo, al resolver la ecuación $x^2 - 1 = 0$ se encuentra una respuesta múltiple, pues tiene dos soluciones, pero si sólo se da una de ellas, la respuesta será incorrecta.

Después de tratar las tareas de resolución de problemas (*problema solving*) también es conveniente mencionar las tareas de *formulación de problemas* (*problem posing)* como por ejemplo la siguiente, tomada de Teh, Loh, Yeo y Chow (2007, p. 60):

Tarea 5*: Le dan una ecuación como esta: 5x - 2 = 33. Escriba un problema... que conduzca a la formación de dicha ecuación. A continuación resuélvala para dar respuesta al problema que ha formulado. ¡Deje fluir su creatividad!*

El objetivo principal de esta tarea no es tanto la resolución de un problema como la presentación de un enunciado de un problema, con el que se valorará también la creatividad del estudiante. Por tanto, hay conexiones entre la *resolución de problemas* y la *formulación de problemas;* por ejemplo:

a) hay tareas de *resolución de problemas* que plantean sucesivamente la *resolución* de un problema y la *formulación* de otro similar al resuelto previamente, pudiéndose generar este último a partir del inicial o;

b) una tarea de *resolución de problemas* puede acarrear, para el estudiante, la adopción de una estrategia de búsqueda y *presentación de problemas* que tengan alguna relación o conexión con el problema inicial, bien porque son una reformulación del mismo a otro contexto en el que resulta más fácil de resolver, o bien porque son una modificación (subproblemas, casos particulares, reducción del número de variables, fijación de alguna variable, etc.), de forma que la resolución de éstos permite encontrar la solución del inicial por extensión, analogía, generalización, etc.

2.1.4. Problemas abiertos

Como se ha visto en el punto anterior, los problemas son tareas que se pueden *extender* o *ampliar*, dando lugar a tareas que, o bien el método o bien la respuesta, admite variantes correctas. Orton y Frobisher (1996, p. 32) propusieron que *un "problema"... es "abierto" cuando no se especifica ninguna meta*. Por ejemplo:

Tarea 3B*: Investiga el número 0,10100100010000...*

La meta de esta tarea es investigar el número, pero es una *meta abierta* (Yeo, 2007, p. 13) sin concretar, sin delimitar, por lo que el estudiante tendrá libertad para abordarla escogiendo la meta concreta que le interese. Esta libertad de elección es la característica principal de la *meta abierta.* Por ejemplo, si se propone la siguiente tarea:

Tarea 3C*: Dado el número 0,10100100010000... Encuentra patrones para:*

a) Conocer las posiciones de la cifra 1 en el desarrollo decimal del número

b) Identificar los lugares ocupados por la cifra 0 dentro de las cifras decimales del número

c) Averiguar la última cifra decimal cuando tomamos una aproximación de ese número con un número determinado de cifras decimales.

Se ve que esta tarea tiene *metas específicas múltiples*, pero todas son *cerradas* (Yeo, 2007, p. 13), ya que están fijadas y no se permite elegir al estudiante la meta a conseguir, como en la **tarea 3B**. Por otra parte, si nos fijamos en las **tareas 3A, 3B y 3C**, que giran alrededor del número irracional 0,10100100010000..., podemos observar que la **tarea 3B** es más abierta que la **3C**, y ésta es más abierta que la **3A**, por lo que podemos inferir que *la apertura puede ser una serie continua*, o lo que es lo mismo: *hay grados de apertura* (Yeo, 2007.p. 13)

2.1.5. Investigaciones

Partiremos ahora de una nueva tarea matemática, con un enunciado similar al de la **tarea 4** anterior:

Tarea 6*: Investigar las potencias de 3 con exponente natural.*

Si nos fijamos en las **tareas 3A y 6**, se puede ver que la **tarea 3A** tiene una meta clara y precisa: buscar el valor de la cifra decimal que ocupa el lugar 4006º. En cambio, la **tarea 6** tiene una meta sin concretar: ¿qué se quiere que investigue el estudiante? El enunciado de la tarea 6 se presta a múltiples concreciones, por ejemplo: a) buscar patrones subyacentes para encontrar la última cifra, o las dos últimas cifras; b) plantearse cualquier problema (incluidos los anteriores de apartado a)) o, por ejemplo, calcular la suma de las cifras de las potencias de 3, etc. La principal diferencia entre las dos tareas es el carácter de la meta. En cualquier caso tienen razón Orton y Frobisher (1996, p. 27) cuando afirman que *muy pocos educadores de las matemáticas clasificarían exploraciones de esta clase* **[tarea 6]** *como problemas*. Por tanto, la **tarea 6** es un tipo de tarea que no se corresponde con la idea de problema.

En Estados Unidos, a la **tarea 6** se le denomina *investigación matemática*; en otros países, por ejemplo en Inglaterra, se le llama *problema abierto* (Orton y Frobisher, 1996, p. 27). Esta última acepción tiene una contradicción interna, ya que si aceptamos que un problema tiene una meta bien definida (véase el criterio nº 1 de Henderson y Pringy (1953)) la **tarea 6** no es un problema pues no la tiene; por tanto, una *investigación matemática* o un *problema abierto* no sería un problema, a menos que relajemos el criterio 1 de Henderson y Pringy.

En cuanto al concepto de *investigación matemática*, Bastow y otros (1991, p. 1) lo definieron de una manera poco precisa como la *exploración sistemática de las situaciones abiertas que tienen características matemáticas.* Más adelante, Orton y Frobisher, (1996, p. 28) definen una tarea investigadora como *una tarea abierta donde está abierta la meta y los estudiantes pueden fijar sus metas específicas para investigar cualquier cosa que deseen*. Otra variante de esa misma época se debe a Lee y Molinero, (1997, p. 6) que añadieron que *las investigaciones, por su misma naturaleza, exigen un acercamiento abierto-desde fuera, una aproximación multifacética.*

Profundizando en la idea de *investigación,* es necesario aclarar que no es lo mismo resolver una *tarea de investigación* que llevar a cabo un *proceso de investigación*, aunque esto último se denomine muchas veces *investigación* en la mayoría de la literatura de investigación en educación matemática. Yeo (2007) aclara que en este caso, la *investigación* incluye la *tarea de investigación* y el *proceso de investigación* (Yeo, 2007, p. 14), ya que en una investigación el estudiante puede elegir la meta a conseguir (*tarea de investigación*), y debe desarrollar un proceso que le permita conseguir la meta (*proceso de investigación*). En este contexto, la tarea de investigación se concreta mediante la formulación de un problema, que se resolverá en el proceso de investigación. El estudiante lleva a cabo esta formulación o *presentación* del problema de investigación al principio de la *actividad de investigación*, en contraposición a la *presentación de problemas*, que puede aparecer al principio, en medio o al final de una tarea de *resolución de problemas* (*problem solving*).

Yeo y Yeap (2009B, p. 3) plantean que la investigación matemática, como proceso, implica cuatro procesos de pensamiento básico: la especialización o particularización, conjeturar, justificación y de generalización. Estos cuatro procesos están basados en los propuestos por Mason, Burton y Stacey (1985) al plantear su modelo de resolución de problemas. Estas ideas aparecen más adelante, en este mismo capítulo, más desarrolladas.

La distinción entre la investigación como tarea, como proceso y como actividad ha sido estudiada por Yeo y Yeap (2009B). Está claro que la propuesta del profesor es la tarea de investigación. Por otra parte, la investigación como actividad a desarrollar por el estudiante, tiene cuatro fases: a) comprender la tarea; b) plantear un problema; c) resolver el problema; d) mirar hacia atrás y plantear más problemas para resolver, o ampliar la tarea de investigación dada (Yeo, Yeap, 2009B, p. 9). En cuanto a las diferencias entre la investigación como proceso y como actividad, Yeo y Yeap (2009B, p. 9) plantean la relaciones entre estos dos conceptos y la resolución de problemas como proceso. En la figura 2.1. se presentan, teniendo como eje vertebrador las fases de la investigación como actividad.

Como puede observarse en la Figura 2.1., aparecen las cuatro fases de la investigación matemática, aunque la primera y la última aparecen juntas (porque no tienen entidad en este contexto), separadas de la segunda y la tercera: planteamiento del problema y resolución del problema. En el proceso de resolución del problema planteado, se puede observar que el estudiante puede plantearlo siguiendo dos caminos, por un lado puede llevar a cabo un proceso de investigación matemática (particularizando, generalizando, conjeturando y justificando) o puede plantear otros caminos para resolver el problema, utilizando heurísticos de Polya o planteando una justificación de tipo deductivo (en forma de demostración) que contenga la solución del problema.

Por tanto, como se puede ver en la figura 2.1, para la resolución del problema se puede llevar a cabo una investigación como proceso, y esta investigación matemática como proceso será un subconjunto del proceso de resolución de problemas. Por otra parte, la resolución de problemas como proceso es un subconjunto de la investigación como actividad, por la propia estructura de esta última.

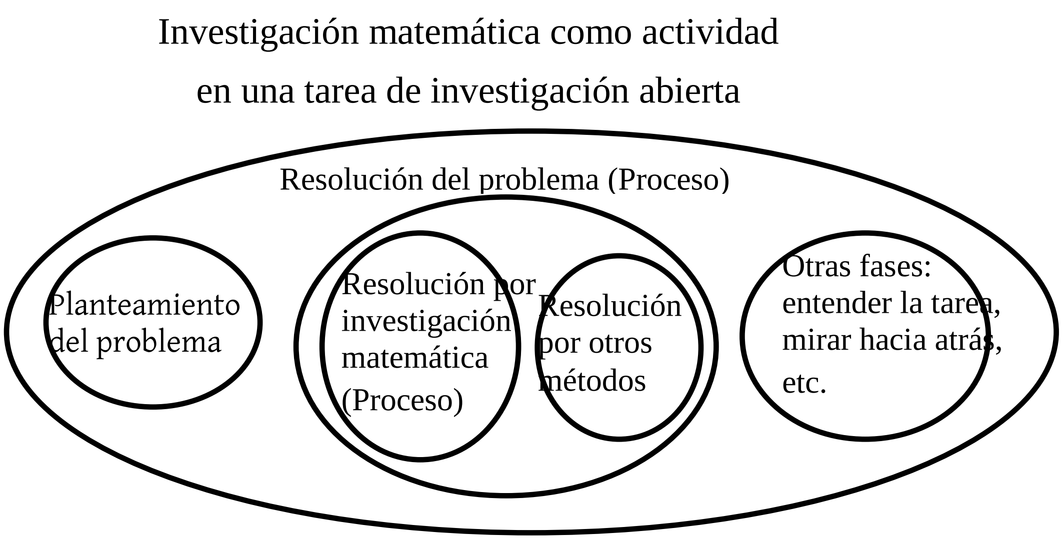


Figura 2.1. Investigación matemática como actividad

En este contexto conviene aclarar la diferencia entre tres de los métodos de enseñanza de las matemáticas que utilizan procesos de investigación: la resolución de problemas, el aprendizaje por descubrimiento dirigido y los *acercamientos investigadores* (Ernest, 1991). Este autor caracteriza la resolución de problemas como *un viaje a un lugar deseado* (Ernest, 1991, p. 285). Pirie (1987) incide en la investigación como *la exploración de una tierra desconocida donde está la meta, el viaje, pero no el destino* (Pirie, 1987, p.2). En cuanto al aprendizaje por descubrimiento dirigido, Jaworski (1994) expone que, en ese caso, los estudiantes son dirigidos al descubrimiento de una fórmula, un hecho matemático o un procedimiento que el profesor tiene claro en su mente. Pero esto, según los dos autores anteriores no es una investigación. Yeo (2007, p. 9) plantea tres diferencias entre las *investigaciones* y el *aprendizaje por descubrimiento dirigido*:

(i) Un acercamiento investigador utiliza tareas más abiertas que en el aprendizaje por descubrimiento dirigido.

(ii) Un acercamiento investigador proporciona menos dirección que en el aprendizaje por descubrimiento dirigido. Esto es solamente en la etapa de comienzo. La cantidad de guía durante un acercamiento investigador depende del juicio del profesor y está basado en su experiencia. Si hay demasiada dirección, entonces es el profesor que está haciendo la investigación. Si hay demasiada poca dirección, los estudiantes pueden perder interés cuando las metas están demasiado lejanas.

(iii) Un acercamiento investigador permite otros descubrimientos inesperados para el profesor, pero las tareas del aprendizaje por descubrimiento no están bastante abiertas para permitir tales descubrimientos.

2.1.6. Resolución de Problemas e investigaciones

Existen múltiples conexiones entre la resolución de problemas y las investigaciones, aunque es preciso diferenciarlas. Yeo, (2007, p. 7) plantea que una de las diferencias principales es *cómo se expresa la tarea*. Habitualmente, la meta en una tarea en resolución de problemas está bastante delimitada desde el principio, pudiéndose reformular para que sea más abierta o, como proponen Mason, Burton y Stacey (1985) y Schoenfeld (1985), se puede comenzar con una tarea de resolución de problemas y, más tarde, ir añadiendo ampliaciones o *extensiones* para acabar transformándola en una investigación; dicho con palabras de Frobisher (1994, p. 158): *casi siempre es posible modificar* [una tarea problem-solving] *para transformarla en... una investigación*. Si esta transformación se lleva a cabo al principio, entonces la meta propuesta en la tarea de resolución de problemas puede ser cambiada; por el contario, si se realiza después de alcanzar la meta original, entonces la tarea se está ampliando. Esta última manera de proceder, como proponen Polya (1945, 1962-1965, 1966); Mason, Burton, Stacey (1982); Schoenfeld (1985) y Guzmán (1991) en la última fase de sus modelos de resolución de problemas, tiene la ventaja didáctica para el estudiante de proporcionar un *andamio* inicial (la meta original de la tarea de resolución de problemas) que sirve para una aproximación progresiva a la realización de tareas de investigación.

Por otra parte, este proceso de transformación de las tareas de resolución de problemas en una investigación forma parte de la pregunta nº 2 de este trabajo de investigación y se profundiza en ello más adelante (capítulo 5). En cualquier caso, diferenciaremos entre las investigaciones que se obtienen a partir de tareas de resolución de problemas y las *investigaciones que tienen su propia existencia separada* (Frobisher, 1994)

A continuación, con la Tarea 7, se va a ilustrar lo anterior con un ejemplo de tarea de resolución de problemas que se puede transformar en una investigación, ampliando su meta, una vez resuelta:

	74			
				186
		103		
0				

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

Tarea 7

Esta tarea de resolución de problemas, una vez resuelta, se fue *extendiendo*, para dar lugar a varios trabajos de investigación con diferentes estudiantes y cursos académicos.
Algunos de los problemas de investigación generados fueron los siguientes:

> *En una p.a. si se conocen dos términos se puede deducir toda la progresión. En una tabla de números como la anterior, si se conocen 4 términos, ¿se pueden obtener todos los demás? ¿en qué condiciones?*
>
> *En el espacio tridimensional, en una figura análoga a la anterior, con forma de paralelepípedo rectangular, formada por cubitos en cada una de las tres dimensiones, ¿conociendo 8 elementos se pueden conocer todos los elementos de la figura? ¿en qué condiciones? Si consideramos una figura análoga, n-dimensional, ¿qué podríamos decir para ella?*

Igual que para una p.a. se conocen fórmulas para hallar el término general, a_n, la suma de los n primeros términos, interpolar medios aritméticos, ¿se pueden obtener fórmulas análogas para las tablas bidimensionales, tridimensionales, N-dimensionales?

En contraposición a lo anterior, hay proyectos de investigación que tienen existencia propia; por ejemplo la siguiente:

Figura 2. 2

Tarea 8

¿Se puede estudiar matemáticamente un arco como el de la figura 2.2 y obtener los patrones numéricos que rigen sus proporciones?

Como se ha expuesto más arriba, el estudio y caracterización del proceso de transformación de una tarea de resolución de problemas en una investigación o, mejor dicho, en un proyecto de investigación o un trabajo de investigación, va a ser uno de los cometidos de esta tesis (véase capítulo 5).

Por último, en lo que respecta a las diferencias entre las tareas investigadoras o proyectos de investigación y las tareas de resolución de problema, Yeo (2007, p.7) plantea tres diferencias principales:

(i) Las tareas investigadoras tienen las metas más abiertas que las tareas de resolución de problemas.

(ii) Las tareas investigadoras conducen a la investigación que es una actividad divergente puesto que estudiantes distintos pueden fijar distintas metas para perseguir, pero las tareas de resolución de problemas conducen a solucionar el problema, que es una actividad convergente, puesto que hay solamente una meta a alcanzar; aunque el resolver el problema puede ser extendido y pasar a ser así una actividad de naturaleza divergente si consideramos su extensión.

(iii) Las tareas investigadoras implican el problema que se presenta y la resolución de problemas, pero las tareas de resolución de problemas implican, sobre todo, solucionar de problema.

2.1.7. *Proyectos o trabajos de investigación, tareas investigadoras, investigaciones matemáticas abiertas, ...*

Una vez analizadas las tareas de resolución de problemas y las investigaciones, junto con las diferencias entre ellas, conviene adentrarse en los proyectos de investigación, trabajos de investigación, tareas investigadoras o investigaciones matemáticas abiertas, que son las que más se parecen a los proyectos de investigación matemática (PIM) planteados en esta investigación. A este respecto se comenzará describiendo algunas características que rodean el contexto en el que se llevan a cabo este tipo de tareas investigadoras, para entrar después en el análisis de algunas de las definiciones que se plantean sobre ellas.

Hay consenso general entre los investigadores (Informe Cockcroft, 1982; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1991, 1992; Moschkovich, 2002) sobre la conveniencia de que las investigaciones matemáticas (en sus diferentes acepciones) estén presente en la clase de matemáticas, porque proporcionan ocasiones a los estudiantes para poner en práctica procesos de pensamiento útiles en la solución de situaciones problemáticas o desconocidas, a la vez que ilustran los modos de trabajo y los métodos empleados por los matemáticos profesionales en su quehacer cotidiano. En este sentido, este tipo de tareas no sólo consisten en resolver problemas, sino que incluyen también la identificación, el planteamiento y el enunciado de problemas; el uso de la particularización, la generalización y la analogía; la formulación de conjeturas; y por último, la construcción de pruebas y demostraciones, mediante el uso de argumentos y razonamientos lógicos.

Civil (2002) analizó las características que se daban en el trabajo de los estudiantes, en un aula en la que se planteen tareas que hagan que éstos trabajen las matemáticas como los hacen los matemáticos profesionales. Propone que el profesor debe:

> *(a) plantear el trabajo en pequeños grupos para la resolución de tareas en forma de retos y desafíos;*
>
> *(b) fomentar que los estudiantes pongan en práctica sus estrategias, las compartan con los demás compañeros y que no se desanimen al primer intento, que sean persistentes en la búsqueda de soluciones;*
>
> *(c) favorecer las discusiones matemáticas y la comunicación de ideas matemáticas entre los estudiantes y de éstos con el profesor;*
>
> *(d) los estudiantes son protagonistas del proceso y se hacen responsables de la toma de decisiones sobre la validez y la justificación de los resultados encontrados (demostraciones, razonamientos, soluciones, etc.).*

Cuando esto ocurre, Schoenfeld (1987) dice que la clase se convierte en un *microcosmo de la cultura matemática*, creándose un ambiente en el que los estudiantes ponen en práctica procesos matemáticos similares a los de los matemáticos profesionales, siendo el nivel académico la única diferencia entre ellos.

Una idea que contribuye a la anterior es el concepto e idea de *debate científico*, que surge en Francia (Legrand, 1986, 1991, 1996). Es un planteamiento metodológico de la enseñanza, que se basa en dos principios (Legrand, 1996, p. 171):

> *- Un principio humano y social: para que la enseñanza científica sea, al mismo tiempo, formadora para el sujeto que estudia y adaptada a la sociedad, que espera las habilidades específicas de aquellos que han sido introducidos a este tipo de pensamiento, es necesario que los alumnos y los estudiantes puedan encontrar en estas enseñanzas los medios de construirse una racionalidad que respete simultáneamente las restricciones de la ciencia y su propia identidad, es necesario que estos aprendizajes contribuyan a la construcción de una coherencia global en un sujeto epistemológico, psicológico y social.*

- Un principio epistemológico: aquel que no haya tenido realmente la ocasión de jugar con auténtica libertad un verdadero juego científico, no tendrá muchas ocasiones de interesarse por los razonamientos esenciales de la ciencia, de comprender la amplitud real de los resultados que establece (comprender la potencia, pero también los límites, de estos algoritmos y formas de pensar) y a continuación, explotar pertinentemente sus resultados para resolver más científicamente los problemas que se le presenten.

Otra variable a tener en cuenta en las tareas de investigación son los procesos matemáticos que los estudiantes ponen en práctica al desarrollar este tipo de tareas. Yeo y Yehap (2009A, p. 7) proponen un modelo para caracterizar, por un lado las fases del proceso de trabajo de los estudiantes y, por otro, los procesos matemáticos cognitivos que se dan y las interacciones que se producen entre ellos. El modelo se presenta en la Figura 2.3.

Como puede observarse, el modelo tiene su base en el modelo de Mason, Burton y Stacey (1982), adaptado a una tarea de investigación. En la etapa de *ajuste de la meta,* es donde el estudiante toma uno de los dos caminos para resolver el problema de investigación:

1. *La búsqueda de patrones.* Este camino le permite la construcción de conjeturas mediante el uso de la particularización y la analogía, que es una forma particular de la generalización (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 87). La refutación de la conjetura obliga a volver a la particularización, y la justificación de la conjetura permite la generalización de los patrones observados, pasar a la fase de *revisión*, etc.
2. El *planteamiento de un problema de investigación específico*. Para la resolución de este problema, se pueden usar *estrategias heurísticas* o *heurísticos* de Polya o, pasando a camino descrito en el párrafo anterior, comenzar con la particularización, etc. En cualquier caso, la resolución del problema conlleva el paso por la *revisión* y, en su caso, *extensión* del problema.

Una vez analizadas algunas características relevantes del contexto en el que se desarrollan las investigaciones, se van a presentar algunas acepciones de estos términos, según varios autores.

En primer lugar, El Informe Cockroft (1982, 1ª edición en castellano (1985)) propone que la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir:

Exposición por parte del profesor;

Discusión entre el profesor y los alumnos y entre estos últimos;

Trabajo práctico apropiado;

Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas;

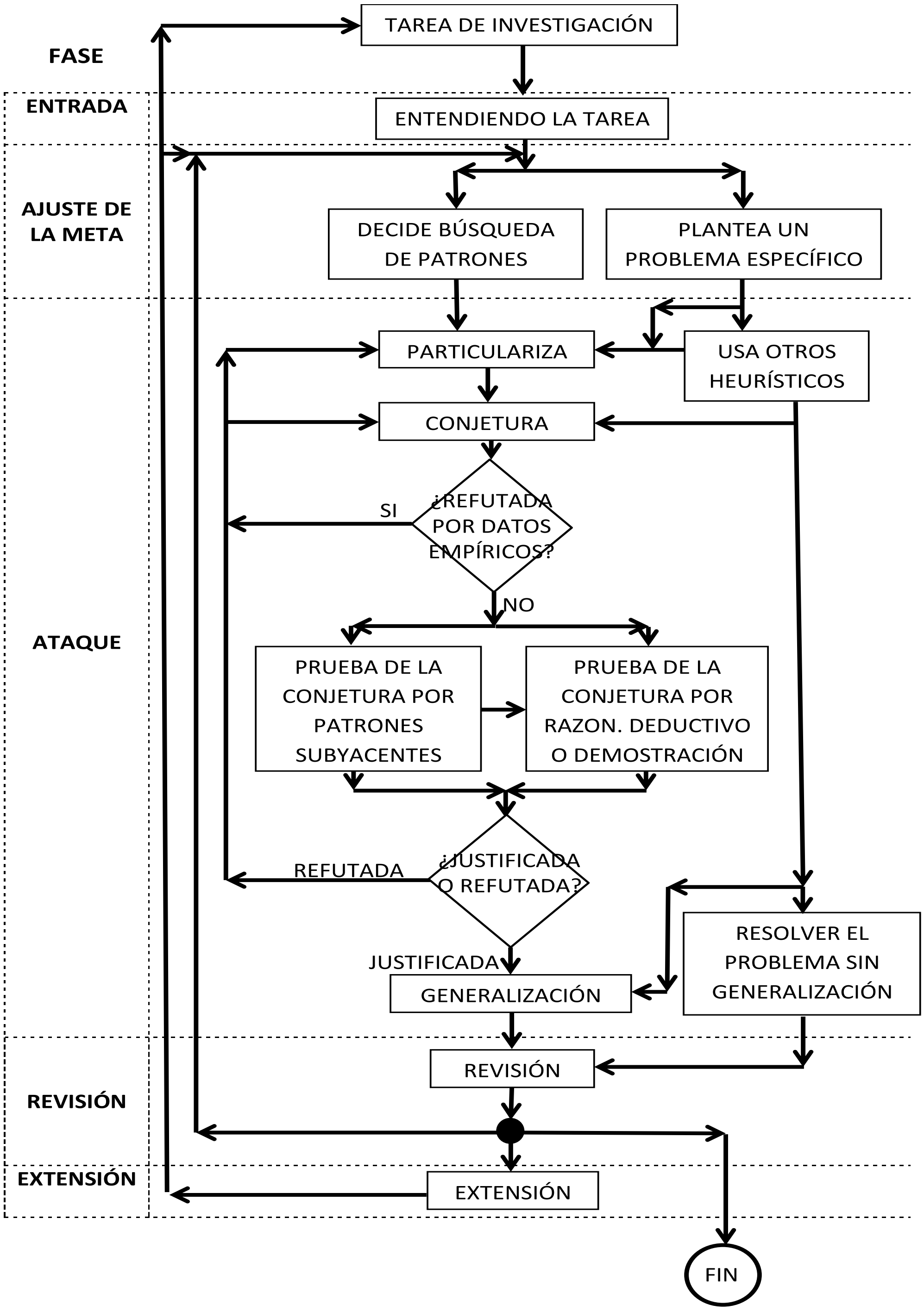


Figura 2.3. Procesos matemáticos de los estudiantes en tareas de investigación

Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana:

Realización de trabajos de investigación. (Cockcroft, 1985, p. 88)

En el mismo Informe se comenta que la anterior enumeración no es suficiente para explicar lo que se pretende en cada una de ellas. Posteriormente, al explicarlas, profundiza en la idea de *trabajo de investigación*, planteando:

> *El concepto de investigación es fundamental para el estudio de las propias matemáticas y para la comprensión de las diversas formas en que éstas pueden emplearse para ampliar conocimientos y solucionar los problemas de muy diversos campos. Sospechamos que, para muchos profesores, las "investigaciones matemáticas" se asemejan a los "proyectos", que en los últimos años se han convertido en uno de los métodos de trabajo más frecuentes en muchas áreas del currículo; en otras palabras, consideran que una investigación matemática constituye una labor muy extensa, que requiere mucho tiempo y que debe llevarse a cabo de forma individual o en el seno de un pequeño grupo de trabajo. Sin embargo, aún cuando ésta es una de las formas que puede adoptar una investigación matemática, no es en modo alguno la única, ni siquiera es la más común. La investigaciones no tienen porqué ser largas ni difíciles. En su nivel más fundamental, surgen a menudo como respuesta a las preguntas hechas por los alumnos durante la exposición del profesor, o con ocasión del desarrollo de un trabajo. Lo fundamental para este tipo de trabajos es que el profesor se muestre dispuesto a "seguir la corriente" cuando el alumno le pregunte: "¿podríamos haber hecho lo mismo con tres números diferentes?" o "¿qué pasaría si...?" (Cockcroft, 1985, p. 89-90).*

Por tanto, el Informe Cockcroft, en el término *trabajo de investigación* engloba una variedad de tareas entre las que figuran las investigaciones obtenidas como resultado de la ampliación y extensión de una tarea de resolución de problemas y los *proyectos*, que son lo que más se parece a los PIM planteados en esta investigación.

También es importante la apreciación del Informe Cockcroft (p. 91 ed. española) sobre un aspecto interesante de las investigaciones:

> *Es necesario advertir que el valor de las investigaciones puede perderse, por lo menos en parte, si después no se debaten los resultados. El debate no debe limitarse al método empleado y a los resultados obtenidos, sino que ha de extenderse a las pistas falsas que se hayan seguido y a los errores cometidos en el curso de la investigación.*
>
> A este respecto, los PIM planteados en esta investigación requieren la elaboración de una memoria o informe sobre el proceso y los resultados, en el que deben recogerse todas las incidencias relativas a la metodología de trabajo, reflexiones personales del estudiante sobre el proceso de investigación, dificultades encontradas, aprendizajes llevados a cabo, eficacia de las ideas puestas en práctica, nivel de consecución de los objetivos planteados mediante los resultados alcanzados, etc.

En cuanto al término proyecto de investigación, Braverman (2006), Braverman y Samovol (2008) y Braverman (2010) plantean que un proyecto de investigación es un *conjunto de problemas de matemáticas con un tema específico, que requiere la exploración, la consideración de casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, el planteamiento de conjeturas y su examen, para probarlas o refutarlas, y el planteamiento de nuevos problemas originales que se basan en el problema dado inicialmente*. (Braverman, 2010, p. 39).

Como se puede observar al analizar la definición anterior, Braverman caracteriza los procesos que conllevan: *la exploración,* la consideración de *casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, las conjeturas,* junto con su prueba o refutación, y *el* *planteamiento de nuevos problemas* derivados del problema inicial. Como puede observarse, tiene similitudes con los planteamientos de Yeo y Yeap, presentados anteriormente. En cuanto al enfoque concreto que plantean, se presenta un ejemplo de este tipo de proyectos, tomado de Braverman (2010, p. 189):

Tarea 9

A)

A1. Coloca los signos + y – en la expresión 1 ± 2 ± 3 ± ... ± 12 para que dé como resultado 0 (si es posible)

A2. Coloca los signos + y – en la expresión 1 ± 2 ± 3 ± ... ± 13 para que dé como resultado 0 (si es posible)

A3. Coloca los signos + y – en la expresión 1 ± 2 ± 3 ± ... ± 14 para que dé como resultado 0 (si es posible)

A4. Coloca los signos + y – en la expresión 1 ± 2 ± 3 ± ... ± 15 para que dé como resultado 0 (si es posible)

B) Coloca los signos + y – en la expresión $1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm 12^2$ *para que dé como resultado 0 (si es posible)*

C) Coloca los signos + y – en la expresión 1.2 ± 2.3 ± 3.4 ± ... ± 16.17 para que dé como resultado 0 (si es posible)

D) Propón nuevos problemas basados en la idea de las tareas anteriores y resuélvelos.

El planteamiento de Braverman sobre *proyectos de investigación* es similar al de una tarea de resolución de problemas extendida, sin llegar a enunciar el problema o problemas generales que subyacen en los problemas planteados, al menos en principio. Quizás esto quede implícito en la tarea planteada en el apartado D).

En cuanto al interés de los proyectos de investigación en clase de matemáticas, Braverman (2006, p. 2) plantea cinco consideraciones que justifican su importancia:

1. El proceso de encontrar una solución creativa y/o presentar un nuevo problema, es un trabajo muy cercano, y se asemeja, al de un matemático.

De ahí que los proyectos de investigación, planteados en edades tempranas, favorezcan la comprensión, por parte del niño, del contenido y del tipo de trabajo que desarrolla un matemático, y esto puede ser tenido en cuenta a la hora de elegir una profesión en el futuro

2. Por lo general, los grandes descubrimientos se hacen por los matemáticos cuando tienen 22 a 26 años de edad.

Por tanto, la enseñanza y el aprendizaje de las técnicas y estrategias útiles en el desarrollo y puesta en práctica del método científico aplicado a la realización de proyectos de investigación, con los estudiantes de la escuela secundaria, puede ser muy motivador. Además, como consecuencia de esta *inmersión natural* y por el acercamiento que esto supone al proceso creativo y de descubrimiento, desarrollando el *pensamiento convergente y divergente* del pensamiento matemático en el estudiante, este tipo de proyectos pueden dar un gran impulso en el desarrollo intelectual del estudiante.

> *3. Como parte de un proceso de investigación, un niño adquiere conocimiento adicional y habilidades avanzadas y capacidades en muchos sub-disciplinas de matemáticas, que en sí mismo es una ganancia valiosa.*

Es decir, que la vivencia del proceso de investigación proporciona al estudiante conocimientos adicionales, más profundos; habilidades más propias del *pensamiento matemático avanzado*, desarrollando sus capacidades y competencias matemáticas.

> *4. Encontrar una solución creativa y/o presentar un problema estimulan las habilidades matemáticas y la motivación para aprender.*

Aunque en estos aspectos tiene mucha importancia el papel del profesor en el proceso, sus motivaciones, objetivos didácticos, etc. (De Bono, 1976, p.148), es claro que, como plantean Mason, Burton y Stacey (1985) el estado psicológico *en estado contemplativo,* del resolutor, una vez resuelto el problema, puede ser uno de las motivaciones más estimulante para aprender matemáticas.

> *5. La competencia habitual del aula contribuye al desarrollo de la creatividad; sin embargo, a menudo provoca conflictos sociales y psicológicos. Contrario a esto, en el proceso individual de un proyecto de investigación, los estudiantes hacen comparaciones sólo con sus propios logros.*

Este aspecto, bien controlado por el profesor, puede contribuir, de manera notable, a la tolerancia de las diferencias de capacidades entre los estudiante y a canalizar, de manera positiva, la competitividad de la clase.

Otro aspecto a tener en cuenta, que apoya le interés de esta investigación, es la propuesta de Artigue y Baptist (2012), la educación matemática basada en investigaciones (*Inquiry-Based Mathematics Education*, IBME) (Artigue, Blombloj, 2013). En este caso, se plantea que a*l igual que la investigación científica, la investigación matemática comienza a partir de una pregunta o un problema, y se buscan respuestas a través de la observación y exploración; se llevan a cabo experimentos mentalesl, materiales o virtuales; las conexiones se realizan con las preguntas que ofrecen similitudes interesantes con la que ya se ha respondido; se ponen en juego técnicas matemáticas conocidas. Este proceso de investigación está dirigido por, o conduce a, respuestas hipotéticas, - a menudo llamadas conjeturas - que están sujetos a validación* (Artigue, Baptist, 2012, p.4). Además, el proceso *puede dar lugar a nuevas preguntas y problemas cuya solución puede afectar a las respuestas a la pregunta inicial, o incluso la formulación de la pregunta misma* (Artigue, Baptist, 2012, p.5). Los mismos autores plantean algunas características del proceso de investigación, a partir de un ejemplo que muestra algunas *características específicas de la investigación matemática (interna) y de sus resultados, por ejemplo:*

- *el papel desempeñado por la exploración progresiva y su organización como la familiaridad con los aumentos de problemas;*

- *el pragmatismo del proceso de consulta y su no linealidad;*
- *la interacción dialéctica entre la prueba y la refutación, y el papel desempeñado en ella por los contraejemplos;*
- *la definitiva (apodíctica) la naturaleza de los resultados obtenidos y la convicción de que hay más experiencia invalidará ellos, sino también la satisfacción intelectual que se obtiene al descubrir nuevas razones fo resultados ya probados;*
- *el hecho de que una vez que se encuentra una solución, uno busca inmediatamente posibles generalizaciones, teniendo en cuenta tanto los resultados y las técnicas utilizadas para la obtención de los mismos;*
- *el cambio en la visión de que tales generalizaciones puede requerir, pidiendo a nuevos dominios y técnicas matemáticas, y cómo pueden contribuir a una nueva comprensión de los resultados iniciales obtenidos.*

Para finalizar, se presenta una última justificación del interés de este tipo de tareas para la clase, extraída de Da Ponte (2007), donde se presentan las razones para la inclusión de este tipo de actividades en los currículos escolares:

1) Las actividades de investigación constituyen una parte esencial del trabajo cotidiano de un matemático profesional, y son muy importantes para los estudiantes en la adquisición de una idea global sobre la verdadera naturaleza de las matemáticas;

2) La realización de este tipo de actividades es muy eficaz para fomentar la participación de los estudiantes en discusiones matemáticas, y lograr que se hagan adictos a las matemáticas;

3) Las actividades de investigación proporcionan a los estudiantes, de diferentes niveles de desarrollo en sus competencias matemáticas, múltiples puntos de entrada a los distintos campos del conocimiento matemático, ya que se pueden realizar mediante diferentes propuestas metodológicas con diferentes niveles de dificultad;

4) Las investigaciones estimulan una forma holística de pensar, ya que describen las matemáticas como una ciencia monolítica, en sus métodos y caminos, a pesar de sus variados campos de conocimiento encuadrados en diferentes áreas;

5) En cada uno de los temas del currículo se pueden plantear investigaciones, lo que favorece la puesta en práctica de un método común de tratar los contenidos;

6) Mediante la realización de estas actividades, los estudiantes se familiarizan con nuevos métodos de trabajo específicos: estrategias, procedimientos y algoritmos.

2.1.8. Proyectos de investigación matemática (PIM)

Conviene, después de la panorámica de *tareas matemáticas* presentada en este capítulo, referirnos específicamente a la idea de *Proyectos de investigación matemática (PIM)*, concretando una posible definición, a partir de la reflexión sobre algunos ejemplos. Hay varias preguntas que planean en este momento: ¿Cuál podría ser la definición de un PIM? ¿qué peculiaridades y especificidades tiene un PIM? ¿Qué similitudes y diferencias tiene un PIM respecto a las tareas presentadas más arriba (sobre todo las del apartado 2.1.7.)? Para dar respuesta a ellas, analizaremos las principales características de un PIM:

la estructura, el producto final, la temática o contenidos de trabajo y los miniPIM o una aproximación escalonada.

Estructura de un PIM

Para explicar la estructura de un PIM se van a presentar dos ideas: las fases que tiene el proceso y el índice del informe final que debe presentar el estudiante para dar por finalizado el proyecto.

En lo que se refiere a las fases, la experiencia acumulada, junto con la reflexión sobre ello, parece constatar que un PIM tiene, a grandes rasgos y sin entrar en los detalles (que hay muchos), 4 fases:

- FASE 1. En ella el estudiante, con el asesoramiento, o no, del profesor, elige el tema de trabajo y, dentro de él, se plantea el problema de investigación. A su vez, va tomando conciencia, con la información facilitada por el profesor, sobre la estructura del trabajo y la envergadura del proceso. En esta fase, el profesor facilita al estudiante el índice del documento final, para que vea hacia dónde se dirige (este índice se presenta en el siguiente apartado).

- FASE 2: El estudiante lleva a cabo las primeras lecturas. revisiones bibliográficas, recogida de información, etc. sobre el problema de investigación, centrándolo, concretándolo, revisándolo. Así mismo, elabora un primer documento o borrador con el enunciado del problema de investigación y con toda la información matemática recogida (que suele ser sobre los contenidos matemáticos que están relacionados con el problema). También esboza los pasos a dar (la metodología a emplear) para resolver el problema. El borrador es entregado al profesor, que lo revisa, lo comenta, orienta sobre posibles caminos, etc. y lo devuelve al estudiante para que los tenga en cuenta.

- FASE 3. Resolución del problema de investigación. En esta fase, el estudiante, resuelve el problema mediante la consecución de unos resultados, pruebas, procedimientos, etc. Estos resultados, junto con el proceso seguido, se recogen y se añaden al primer borrador modificado, dando forma así al segundo borrador del PIM.

- FASE 4. Una vez resuelto el problema de investigación, la actividad principal del estudiante es redactar el documento o informe final, ateniéndose al guión facilitado por el profesor al principio del proceso. Con ello se da por terminado el proceso.

El planteamiento anterior tiene muchas similitudes con el de Yeo y Yeap (2009B) en el que plantean también las cuatro fases, aunque la diferencia está en que los autores anteriores no plantean, al menos explícitamente, de forma planificada, la elaboración de un documento que recoja todo el proceso. Además, en un PIM, la elaboración del mismo está integrada en el proceso, a través de los borradores, como algo natural. Por otra parte, los planteamientos de Yeo y Yeap (2009B, p. 9) que se concretan en la figura 2.1 de este mismo capítulo, también se asemejan mucho al proceso de investigación que se desarrolla en un PIM.

Documento final

El producto final es un documento con un índice conocido por el estudiante desde el principio y que se presenta a continuación (Figura 2.4):

1. Introducción:
- *El problema de investigación*
- *Justificación y motivación*
- *Objetivos del Proyecto.*

2. Contexto académico:
- *Relación del problema de investigación con las matemáticas*
- *Estado de la cuestión.*

3. La investigación:
- *Metodología de investigación*
- *Matemáticas necesarias*
- *Resolución del problema de investigación: principales resultados.*

4. Conclusiones:
- *Grado de resolución del problema de investigación y nivel de consecución de los objetivos planteados*
- *Puntos fuertes y débiles de la investigación.*
- *Problemas abiertos, posibles líneas de investigación futuras*
- *Impresiones y reflexiones personales del proceso y de los resultados.*

5. Bibliografía

6. Anexos/Apéndices

Figura 2.4 Índice del documento final de un PIM

Como se puede observar, hay algunos apartados que el estudiante ve por primera vez y que hay que explicarle el contenido: ¿Qué son los objetivos? ¿Cómo justificar y motivar la realización del PIM? ¿Qué es el estado de la cuestión? ¿Qué es la metodología? ¿Qué son los puntos fuertes y débiles...? Todo esto es lo más complicado para él, porque es la primera vez que tiene que reflexionar sobre ello. Para eso está el profesor, para explicarle el significado de cada aspecto y ayudarle paulatinamente a que vea la importancia de ellos y la necesidad de hacerlos explícitos, porque son los fundamentos del PIM.

En cualquier caso, una de las características y peculiaridades de un PIM es la elaboración, por el estudiante, de ese documento o informe científico, que recoge los resultados y el proceso de investigación, todo ello con una fundamentación acorde con la madurez intelectual del estudiante. Además, la experiencia en este tipo de trabajos asegura que este documento consigue una riqueza didáctica muy grande, pues obliga al estudiante a hacer un esfuerzo de reflexión y de síntesis, para desarrollar y reflexionar sobre casi todos los aspectos de las competencias matemáticas básicas, algunos de los cuales no se trabajan habitualmente en clase.

La temática o los contenidos de trabajo

Una de las formas de propiciar un mejor conocimiento de lo que es un PIM, puede ser mediante la presentación de ejemplos del aspecto clave de un PIM: el problema de investigación. Para ello, se presentan y se comentan algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Título del PIM: Modelos matemáticos en la Catedral de Burgos. Arcos y ventanales

Problema de investigación

Muchas veces admiramos la belleza de un cuadro o de una melodía, pero cuántas veces nos hemos fijado en una gran construcción gótica o románica sin tener éstas más atractivo que la geometría.

Para nosotros el ejemplo más cercano es en la catedral de nuestra ciudad, Burgos. Esta posee multitud de arcos, ventanales, pináculos, rosetones, etc. con los que se puede comprobar los procedimientos geométricos utilizados.

Ante esto se nos plantean una serie de preguntas, como ¿qué matemáticas hay en estos elementos?, ¿qué modelos matemáticos nos ayudan a entender la estructura de estos elementos?, ¿cuáles son las proporciones que las rigen, para que el conjunto despierte en nosotros esas sensaciones de armonía o de placer estético?

La concreción de este problema fue la construcción (mediante Geogebra) y el análisis de las proporciones de tres modelos matemáticos sobre tres arcos de la Catedral de Burgos. El estudio analítico, con coordenadas genéricas en algunos casos, hace que afloren los patrones numéricos que rigen las proporciones y medidas de los elementos que componen los arcos estudiados. La metodología fue estudios de caso.

Este tipo de PIM tiene similitudes con las tareas de investigación de Yeo y Yehap (2009A, p. 7), aunque, en el modelo de procesos de pensamiento propuesto por estos autores (figura 2.3 de este capítulo) no se ajusta demasiado a ello en cuanto a las particularizaciones y las generalizaciones que allí se plantean.

Ejemplo 2

Título del PIM: Sobre la existencia de números perfectos impares. Un estudio de casos en el conjunto de los números Naturales

Problema de investigación

Esta investigación se sitúa en la materia de Matemáticas, dentro de la rama de Teoría de Números, y trata sobre un tipo específico de números naturales: los llamados números perfectos. Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de sus divisores propios, por ejemplo, el número 6 (1+2+3=6) o el número 28 (1+2+4+7+14=28). Los números naturales (y, por tanto, los perfectos) pueden ser pares o impares. En este trabajo analizaremos la naturaleza de los números perfectos impares, íntimamente ligados a los números primos. Así, nuestro objetivo final será demostrar que no existe ningún número perfecto impar.

Aunque el enunciado del problema de investigación podría calificarse de pretencioso, ya que no consiguió alcanzar el objetivo final planteado (aunque se acercó bastante), este PIM fue premiado con el premio especial del jurado al mejor trabajo presentado en el XXVII Certamen de Jóvenes Investigadores de España (organizado por el Instituto de la Juventud de España, INJUVE, 2014).

Como se puede ver, el ejemplo 2 es un PIM en el que se aborda un tema de matemática pura; es decir, una *investigación básica*, en la que las demostraciones constituyen el centro del proyecto. El estudiante divide el conjunto N, de los números naturales, en 6 subconjuntos disjuntos y fue demostrando (por reducción a lo absurdo, casi siempre) que en los cinco primeros subconjuntos no podía haber ningún número perfecto impar. Para el sexto subconjunto demostró alguna condición que debería cumplir un nº perfecto impar perteneciente a él y conjeturó otras que son la antesala del objetivo final no alcanzado. La metodología es estudios de caso, como figura en su título.

Se ha explicado lo anterior para evidenciar que los contenidos de un PIM pueden ser cualesquiera, no estando circunscritos a problemas en los que los procesos cognitivos que se dan sean los del modelo de Mason, Burton y Stacey (1985): particularizar, generalizar, conjeturar y justificar, muy comunes en las *tareas de investigación.*

Ejemplo 3

Título del PIM: Modelos funcionales para la corrección de notas.

Problema de investigación

La realización de este trabajo está basada en un problema que a menudo se plantean tanto profesores como alumnos: "Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección [...]"

En este ejemplo se parte de un problema concreto planteado por el profesor Arcavi en el contexto israelí y da pie a la estudiante para, partiendo de modelos funcionales sencillos, con muchas limitaciones, adentrarse en el mundo de las funciones logarítmicas o trigonométricas, que pueden servir como factores de corrección de notas y sorprenden por su validez y sus singularidades. En este caso sí se dan los procesos de particularización, generalización, conjeturas y pruebas.

Como se puede ver, el problema de investigación no está enunciado de forma completa, ya que no deja explícitas las preguntas que se quieren contestar con la investigación.

Ejemplo 4

Título del PIM: Los grupos de frisos en la Catedral de Burgos

Problema de investigación

El trabajo pretende dar respuesta a cuestiones que se nos planteaban sobre los grupos de transformaciones que hemos encontrado en la Catedral de Burgos. ¿En qué rama de las matemáticas pueden incluirse estas transformaciones? ¿Cuál es su fundamento matemático? ¿Qué relaciones guardan entre sí movimientos tales como las traslaciones, simetrías o giros que pueden apreciarse? ¿Aloja el monumento todos los tipos de transformaciones que se derivan de los grupos de frisos?

En este ejemplo, el estudiante se plantea estudiar si en la Catedral de Burgos se pueden encontrar los 7 grupos posibles de frisos matemáticos. Para ello, primero fundamenta matemáticamente el tema estudiando los grupos de transformaciones, para luego aplicarlo a la búsqueda de todos los posibles grupos de frisos en la Catedral. Este desarrollo es el que vertebra la metodología de investigación del PIM.

Ejemplo 5

Título del PIM: Los inicios en la Teoría de las Probabilidades

Problema de investigación

En este trabajo me dispongo a investigar sobre los inicios de la teoría de la probabilidad buscando la respuesta a unas preguntas: ¿Quiénes fueron los primeros matemáticos en plantearse problemas sobre la probabilidad? ¿Cuáles fueron esos problemas? ¿Qué diferentes soluciones se les dio? ¿Cómo se resolverían hoy en día?

Este PIM, se podría encuadrar en el marco de investigaciones descriptivas, cuya temática, en este caso, se centra en un episodio de la historia de las matemáticas. El PIM recoge los primeros momentos del nacimiento de la Teoría de las Probabilidades, con el estudio de los problemas planteados entre matemáticos de renombre y algún que otro jugador... En este tipo de PIM, los estudiantes suelen decir que *si no inventan o descubren algo, ¿eso vale como investigación?, ¿están haciendo una investigación...?* Estas ideas obedecen a la creencia de que los investigadores son personas que descubren, inventan y crean todos los días y en todos los trabajos que emprenden.

A la vista de los ejemplos, se puede ver que la temática puede ser tan variada como son los contenidos matemáticos: matemática pura o aplicada, utilizando la realidad o circunscrito al mundo interno de las matemáticas, con procesos de modelización, con la historia de las matemáticas, partiendo de una tarea de resolución de problemas o considerando la investigación *con entidad propia*, etc.

Los miniPIM o una aproximación escalonada.

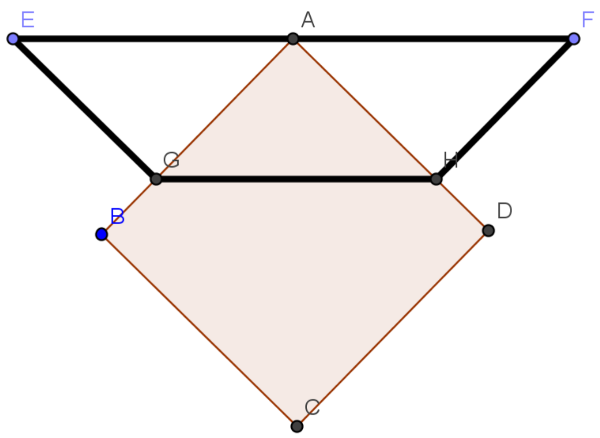
Desde el punto de vista didáctico es conveniente, aunque no imprescindible, un acercamiento paulatino de los estudiantes al proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. De ahí que, si el contexto lo permite, se pueden plantear a los estudiantes unos trabajos de acercamiento a la investigación, que se pueden denominar *miniPIM.* En estos casos, el documento final no tiene uno apartados de fundamentación tan exhaustivos, porque el objetivo es que los estudiantes se aproximen escalonadamente a los procesos de investigación.

Este tipo de propuestas pueden llevar un guión de trabajo para los estudiantes, semejante a los que propone Braverman (2010) en la tarea 9 presentada en el apartado 2.1.7 de este capítulo. Eso ayuda mucho a los estudiantes a que vean, con ejemplos, el tipo de preguntas que generan nuevos problemas, se habitúen a hacerse preguntas como algo natural en un proceso de búsqueda y de análisis de situaciones o de procesos cambiantes.

Un ejemplo de miniPIM es el siguiente, basado en un problema del profesor Arcavi (que conforma la primera parte de la propuesta):

EL CAMINO MÁS CONVENIENTE PARA ATRAVESAR UN BOSQUE

Presentación de la situación



El cuadrado de la figura representa una zona de un bosque que está acondicionada para efectuar marchas y rutas a pie. El exterior del cuadrado es la zona abrupta y salvaje del bosque, sin transformar. Toda la figura es simétrica respecto a la línea imaginaria que une los puntos A y C.

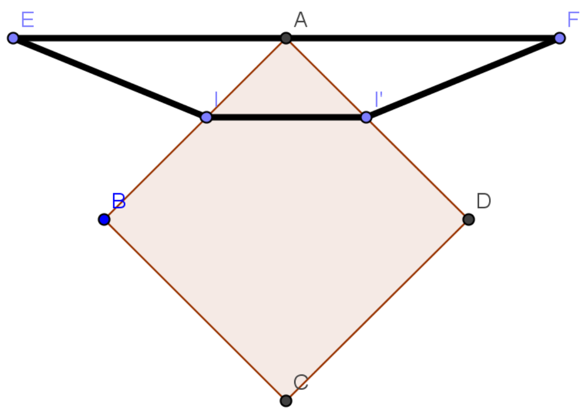
Nuestro objetivo es desplazarnos desde el punto E hasta el punto F, empleando el menor tiempo posible. Para ello tenemos dos opciones:

Opción 1: Recorrer el segmento EF que tiene una distancia conocida **2d**.

Opción 2: Seguir la ruta marcada por los puntos EGHF, pasando por el interior de la zona cuadrada, acondicionada para caminar. En este caso las parejas de segmentos EG y AB, FH y AD son perpendiculares.

Sabiendo que la velocidad de desplazamiento dentro del cuadrado es **5v km/h.**, siendo **v** la velocidad de desplazamiento fuera del mismo, calcular:

a) La longitud de cada ruta en función de la distancia **d**.
b) El tiempo necesario para recorrerlas, en función de **d** y **v**.
c) La ruta más conveniente para cumplir nuestro objetivo.



Una forma de generalizar el modelo

Ahora deseamos resolver el mismo problema para el caso en que la trayectoria recta desde E hasta el cuadrado no sea obligatoriamente perpendicular al lado de éste.

Dando por hecho que la longitud del segmento AI es **x**, calcular las distancias entre los puntos:

d)E e I, en función de **x** y la distancia conocida inicialmente **d**. Demostrar que dicha distancia responde a la expresión:

$$EI = \sqrt{x^2 + d^2 - d.x.\sqrt{2}}$$

e) I e I´, en función de **x**.

Con los resultados obtenidos anteriormente, calcular:

f) La longitud de la ruta que atraviesa el cuadrado por los puntos I e I´.

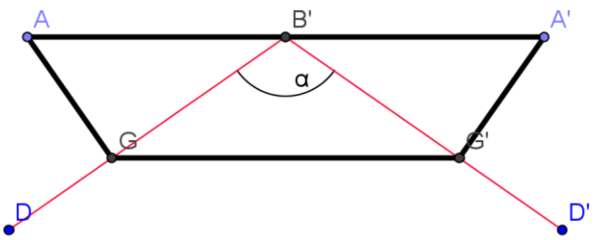
g) El tiempo T(**x**) necesario para efectuar el recorrido anterior, en las mismas condiciones de velocidad de desplazamiento que en los apartados a) y b). Demostrar que T(**x**) tiene por expresión

$$T(x) = \frac{2}{v}\sqrt{x^2 + d^2 - d.x.\sqrt{2}} + \frac{x.\sqrt{2}}{5.v}$$

h) El valor de **x** para el que el tiempo T empleado en la ruta sea mínimo.

Otra generalización del modelo

Vamos a plantearnos la pregunta inicial para el caso en que la zona acondicionada para el caminante sea un polígono diferente, con un ángulo interior α, como en la figura. Conservaremos el dato AA´=**2d,** las velocidades como en el problema inicial y la condición de que G y G´ son los pies de las perpendiculares desde A y A´ a los segmentos B´D y B´D´ respectivamente.



Con estas condiciones,

j) Demostrar que $AG = d.cos(\alpha/2)$; $GG' = 2d.sen^2(\alpha/2)$;

Utilizando los resultados anteriores,

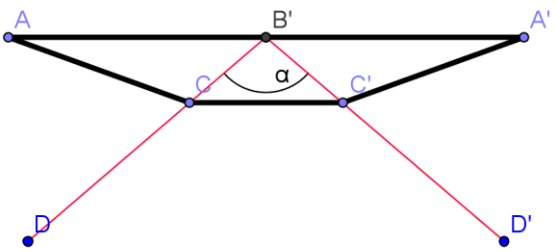
k) Comprobar que la ruta AGG´A´, en función de α, mide $R(\alpha) = 2d\big(cos(\alpha/2) + sen^2(\alpha/2)\big)$.

l) Calcular el valor de α para el que la longitud $R(\alpha)$ de la ruta es mínima.

m) A partir de lo anterior, calcular la expresión del tiempo que se tarda en recorrer la ruta anterior y el valor de α para el cual el tiempo necesario para recorrerla es mínimo.

Generalizando globalmente el modelo

Por último, nos plantearemos la pregunta inicial para un modelo en el que la zona acondicionada para el caminante es un polígono con el ángulo interior en B´ igual a α, la distancia AA´=**2d,** los segmentos AC y A´C´ no son necesariamente perpendiculares a B´D y B´D´ respectivamente, y también seguimos conservando las mismas condiciones para las velocidades en las dos zonas diferenciadas del bosque.



Con las condiciones anteriores, calcular el valor del ángulo α para el cual el tiempo empleado en recorrer la ruta ACC´A´ es mínimo.

Los miniPIm intentan proporcionar un acercamiento paulatino del estudiante al proceso de descubrimiento en matemáticas. El ejemplo presentado tiene varias partes, en cada una de ellas se va generalizando alguna cualidad o variable del problema inicial.

Como estos trabajos se hacen con estudiantes que no tienen experiencias previas, hay que guiarlos, al menos inicialmente. El guión del ejemplo tiene cuatro partes:

1. Presentación de la situación
2. Una forma de generalizar el modelo
3. Otra generalización del modelo
4. Generalizando globalmente el modelo

Al estudiante se le proporciona la primera parte y una vez resuelta se le pide que haga variaciones en el problema y se plantee su resolución. Si no se le ocurre nada, que es muy habitual al principio de trabajar así, entonces se le proporciona la segunda parte del guión, para que vea un modelo de trabajo para extender una tarea de resolución de problemas. Este proceso de repite con las otras dos partes, la 3ª y la 4ª.

Si este proceso se repite con otras tareas de resolución de problemas, el estudiante aprende a plantearse él mismo preguntas y problemas nuevos (variantes del problema inicial, el problema en otros contextos, etc.) acercándose al planteamiento de verdaderos PIM.

Como vemos es una propuesta de trabajo guiado, con preguntas cerradas y una estructura de *andamios*, que sirve de guía para estudiantes que no tienen experiencias previas, similar a los proyectos de investigación de Braverman (2010). En algunos casos, la guía proporciona la respuesta a la pregunta, de manera que el estudiante puede utilizarlas como instrumento de autocorrección y de contraste con la respuesta encontrada por él. De esta manera, el estudiante aprende a plantearse preguntas y problemas de profundización, de ampliación y de extensión de situaciones de R.P. Además de esta forma se proporciona al estudiante un modelo de actuación y de trabajo, que puede interiorizar progresivamente.

Pero, como se puede observar con el ejemplo, esto es diferente a un PIM en el sentido que se va a utilizar en esta investigación. Los miniPIM pueden ser usados, sin el guión de trabajo o con él (en función del contexto y, sobre todo, de los objetivos que tenga el profesor), para plantear a los estudiantes tareas de R.P. que pueden ser ampliadas a PIM (en el capítulo 5 se desarrolla el tema detalladamente).

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

3.1. PRESENTACIÓN

La conceptualización teórica de la investigación que se presenta, se apoya en los últimos avances realizados en la interacción persona-herramienta. Uno de los puntos fundamentales de estos enfoques es que la relación principal es la del sujeto con el objeto de su actividad. La herramienta (también denominada instrumento), ya sea tecnológica o tradicional de lápiz y papel, está en una posición mediadora intermedia entre el sujeto y el objeto. En este contexto las principales ideas del marco teórico son la *teoría de la actividad*, y dentro de ellas las *actividades mediadas por un instrumento.* En estas últimas, en la interacción persona-instrumento, se producen acciones de mediación *epistémicas, pragmáticas y heurísticas*, que permiten la *Génesis documental* a través de las funciones de *instrumentación* e *instrumentalización.*

Por otra parte, la investigación plantea el estudio de los procesos cognitivos particularizar, generalizar, conjeturar, justificar y la analogía, utilizados por los estudiantes en las tareas investigadoras (en particular en los PIM). En este caso, la conceptualización teórica de la investigación se apoya en: a) los *ejemplos genéricos* y la *generalización de patrones de proceso y de resultados* como pilares de las argumentaciones *constructiva* (para la construcción de la conjetura) y *estructurante* (para su justificación); b) la *unidad cognoscitiva,* que controla la continuidad entre las *argumentaciones* y la prueba; c) la *continuidad estructural*, que asegura la misma estructura lógica (mismo tipo de razonamiento, *deductivo, inductivo o abductivo*) de las *argumentaciones* y la *prueba*.

En cuanto al estudio sobre los cambios en los conocimientos del profesor, a partir del análisis de los PIM de los estudiantes, el marco teórico utilizado se basa en: el modelo de Shulman de los dos dominios de conocimiento: *conocimiento del contenido matemático* y *conocimiento didáctico del contenido matemático,* con los tres subdominios de Ball, Thames y Phelps, en cada uno de los dominios: conocimiento *común, especializado* y *en el horizonte*; conocimiento didáctico *de contenido y la enseñanza*, de *contenido y los estudiantes* y del *currículo.* Se completará la conceptualización teórica con el modelo MTSK, que contempla las *creencias* del profesor junto con los dominios de *conocimiento* del modelo de Shulman.

3.2. LA TEORÍA DE LA ACTIVIDAD

La *teoría de la actividad* surge en la década de los años veinte del siglo pasado en la Unión Soviética. En ella se concibe la *actividad* como la *actuación de un sujeto* sobre un objeto *para conseguir una meta* en base a una motivación. Vygotski (1930, 1931) planteó un primer marco teórico para conceptualizar la idea de *actividad mediada por herramientas y signos*. Posteriormente, Leontiev (1975, 1978, 1981) plantea su *teoría general de la actividad,* en la que concede gran importancia a la *actividad mediada por artefactos.*

En la descripción de una actividad, Leontiev (1978, pág. 52) plantea que ésta está constituida por un sujeto, un objeto, unas acciones y unas operaciones:

- El sujeto es la persona o grupo de personas implicadas en la actividad.

- El objeto, entendido como objetivo de la actividad, es el que motiva la actividad en el sujeto y el que genera las acciones en dirección a su consecución.

- Las acciones son lo que habitualmente se entiende por tareas. El sujeto desarrolla diferentes acciones, con diferentes direcciones, pudiendo darse el caso de que puedan solaparse o entrar en conflicto unas con otras. Las acciones tienen una componente formal y otra operativa, que es la forma concreta y real en que se lleva a cabo.

- Las operaciones son un tipo particular de acciones, concretamente las que son llevadas a cabo de forma automática por el sujeto. En este caso, las acciones son rutinas adquiridas por el sujeto con la práctica y la repetición de una misma acción a lo largo del tiempo. Las condiciones bajo las que se lleva a cabo la acción también influye en el resultado de la misma.

3.2.1. El Enfoque Instrumental

Leontiev (1978, pág. 63)) plantea como aspecto importante de la Teoría de la Actividad la mediación por herramientas o artefactos. Las herramientas pueden ser máquinas, instrumentos, códigos de señales (lenguajes, por ejemplo) que actúan como mediadores en el desarrollo de la actividad. Estos artefactos deben ser tenidos en cuenta en cualquier análisis pues juegan un papel muy importante en las actividades

La actividad mediada

Cuando la relación entre el sujeto y el objeto de la actividad no es directa, sino que se lleva a cabo a través de un instrumento, surge la idea de *actividad mediada por un instrumento* (Wertsch, 1997, 1998) que considera la *actividad mediada* como una *unidad de análisis que conserva las propiedades características de los individuos, las herramientas y los contextos* (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 667). En este contexto, el trabajo con el instrumento (a la luz del objeto de la actividad) es el que produce las *relaciones de mediación*. Beguin y Rabardel (2000), junto con Rabardel y Bourmaud, (2003) plantean un esquema teórico para la *mediación a través de un instrumento* (figura 1), distinguiendo *tres orientaciones principales: (1) hacia el objeto de la actividad; (2) hacia otros sujetos; (3) hacia el Sujeto mismo* (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 668).

En la figura 3.1 se pueden observar las actividades de mediación a través del instrumento (líneas discontinuas) y las actividades no mediadas por el instrumento (líneas continuas) que también se realizan.

En cuanto a las relaciones de mediación, estas pueden ser de tres tipos: *epistémica, pragmática y reflexiva o heurística* (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 670) según su contenido y hacia qué o quién se dirija. Se describe a continuación, cómo son estas mediaciones para cada uno de los agentes de la actividad mediada:

(1) Hacia el objeto. En este caso la *mediación epistémica* está dirigida a conocer el objeto de la actividad. El sujeto toma conciencia aquí de la naturaleza de la meta de la actividad. Se produce en la fase de análisis del esquema de funcionamiento de la componente artefacto del instrumento. En cuanto a la *mediación pragmática*, ésta se dirige a conocer la acción y funcionamiento del objeto. Puede conllevar la transformación (revisión, modificación, adaptación) del objeto o meta de la actividad.

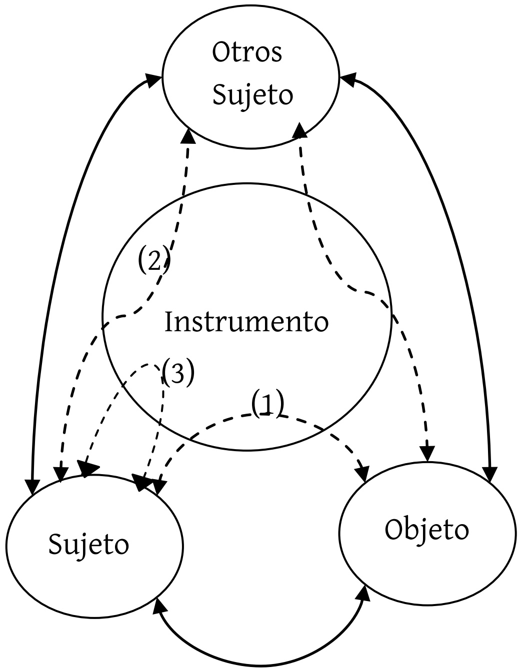


Figura 3.1. Actividades de mediación a través de un instrumento

(2) Hacia otros sujetos. La *mediación epistémica* se dirige a procurar el conocimiento de otros sujetos, sus ideas, razonamientos, esquemas mentales, aprendizajes, etc., mientras que la *mediación pragmática* intenta actuar sobre ellos produciendo transformaciones y cambios, nuevos aprendizajes, modificación de sus esquemas mentales, etc.

(3) Hacia el sujeto mismo. En este caso, la mediación más importante que se produce es la *mediación reflexiva o heurística*, dirigida a la gestión, el control de la actividad y la toma de decisiones, en función de la evolución de lo que se está haciendo y/o consiguiendo. Esta mediación se concreta en la elaboración de notas y anotaciones para al sujeto mismo. En el caso de una actividad mediada en la que el sujeto (o un aspecto de él) es también el objeto de la actividad, en estas condiciones, también se da la *mediación epistémica,* dirigida al conocimiento de ese aspecto del sujeto que conforma el objeto de la actividad, así como la *mediación pragmática*, que buscará la transformación y el cambio en el objeto (el propio sujeto) de la actividad.

Los instrumentos

Por otra parte, en este enfoque es fundamental el concepto de instrumento: el instrumento es una *unidad funcional mixta* con una estructura basada en dos componentes: *el artefacto y el esquema asociado* (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 670); es decir, la estructura del instrumento tiene dos componentes (Beguin y Rabardel, 2000, p. 179):

a) Estructura de artefactos: objetos materiales, signos y símbolos, códigos utilizados para expresar relaciones, junto con el papel, lápiz, etc. que sirven para producir y modificar el instrumento. El artefacto puede ser simbólico o material, producido por el sujeto o por otros. De estas ideas surgen los instrumentos cuyo diseño es de *lápiz y papel* (Beguin y Rabardel, 2000, p. 179) cuyo artefacto es de tipo simbólico (signos, códigos, etc.), frente a los instrumentos que se concretan en un objeto cuyo artefacto es de tipo material (calculadora, ordenador, etc.). En este sentido, *el instrumento no se puede reducir al artefacto* (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 670). Precisamente para que no se produzca esa reducción, proponen las siguientes estructuras del instrumento.

b) Estructuras psicológicas: son las que organizan la actividad. Estas estructuras forman lo que Vergnaud (1996) denomina *esquema*. Un esquema es *una organización invariante del comportamiento, para una determinada clase de situaciones* (Vergnaud, 1998, p. 168). Las situaciones se conciben como tareas o combinación de varias tareas (en las situaciones más complejas) y el invariante no es el comportamiento, sino la organización del comportamiento, que se repite por ser eficaz para una amplia gama de situaciones, aunque adopte acciones concretas diferentes, en función de la situación concreta. El *esquema e*s la manera como el sujeto organiza sus acciones en cada clase de situaciones, en particular en las actividades mediadas por un instrumento.

Vergnaud considera que los esquemas tienen un papel tan importante en las situaciones, que, plantea (1996c, p. 203) que bebería hablarse mucho más de las interacciones *esquema - situación* que de las interacciones *sujeto – objeto*, ya que el esquema es la parte más importante del instrumento, que es el que produce las relaciones de mediación entre todos los que intervienen en la actividad mediada.

Los esquemas

Para facilitar la comprensión de la idea de *esquema*, Vergnaud (1996c, p. 201-202-206; 1998, p.173) plantea que todo esquema está compuesto por:

1) *Metas*. El sujeto debe descubrir, conocer y/o modificar la finalidad de su actividad, plantearse submetas, etc. Esta parte del *esquema* es la que organiza la actividad del sujeto hacia el conocimiento de esas metas.

2) *Reglas de acción*. Son las que permiten al sujeto buscar información y controlar los resultados de sus acciones. Son enunciados de la forma "si... entonces..."que permiten al sujeto generar secuencias de acciones.

3) *Invariantes operatorios* o *invariantes operacionales*. Son los conocimientos contenidos en el esquema, denominados por Vergnaud (1996c, p. 202) *conceptos en acción* (objeto, predicado o categoría de pensamiento considerada como pertinente o relevante para la situación) *y teoremas en acción* (proposiciones sobre lo real consideradas verdaderas). Los *invariantes operatorios* u operacionales pueden estar implícitos o explícitos en el sujeto y constituyen la base para que avance en el proceso de consecución de la meta o metas de la actividad, usando las reglas más adecuadas. Así como los conceptos y teoremas de la ciencia están explícitos, los invariantes operatorios no lo están necesariamente (Vergnaud, 1990, p.144) y el proceso de explicitación, a través de la enseñanza y el aprendizaje, es lo que los convierte en conocimientos científicos para el estudiante, ya que lo explícito se puede analizar si es verdadero o falso, relevante o no relevante, pero lo implícito no.

4) *Razonamientos o posibilidades de inferencia*. Todas las acciones del sujeto, que se derivan de los tres ingredientes anteriores, (*metas, reglas, invariantes operatorios)* conllevan c*álculos* inmediatos que se pueden llevar a cabo a través de inferencias y razonamientos.

Los *esquemas* son fundamentales porque son los que generan acciones y secuencias intelectuales, a través de los invariantes operatorios, que son la base de la representación. Por otra parte, hay esquemas perceptivo-gestuales (para contar, hacer un diagrama o un gráfico), verbales (para hacer un discurso), sociales (para gestionar un conflicto o para establecer relación con otra persona). En particular, los algoritmos son *esquemas*, pero no todo esquema es un algoritmo (Vergnaud, 1998, p. 176). Además, cuando un algoritmo es utilizado repetidamente, se convierte en un esquema ordinario o hábito.

Por otra parte, un *esquema* no es directamente accesible a un observador. Toda la dificultad, para un investigador, está en identificarlo a partir del comportamiento y de los rastros de la actividad de los estudiantes (Guin y Trouche, 2002, p. 225); es decir, que se hace necesario interpretar el comportamiento del estudiante para identificar y comprender la naturaleza de sus concepciones.

Por tanto, volviendo a la idea inicial de instrumento, se tiene que el artefacto y el esquema asociado conforman el instrumento que actúa como mediador entre el sujeto y el objeto de la actividad.

3.3. La Génesis Instrumental

La génesis instrumental es una forma de conceptualizar los procesos de aprehensión (Beguin y Rabardel, 2000; Rabardel y Beguin, 2005). En este proceso de aprehensión, el sujeto interioriza algo que está en el exterior, (el medio de otra persona: el artefacto) asociándolo con su propio medio (el esquema) produciéndose la transformación del artefacto en instrumento.

Así mismo, en la *génesis instrumental* (Rabardel, Bourmaud, 2003) se dan dos procesos duales:

1. *La instrumentación*. La dimensión de la instrumentación va desde el artefacto hacia el sujeto y se manifiesta en los cambios que se producen en los *esquemas* de acción de este último al utilizar el artefacto-instrumento. (P. Rabardel, Bourmaud, 2003, p. 673). Los cambios en los esquemas se producen mediante las *funciones pragmáticas* (acción y uso), *epistémicas* (conocimiento) *y heurísticas* (gestión y toma de decisiones) que tienen los esquemas (Guin y Trouche, 2007).

2. *La instrumentalización.* Esta dimensión va del sujeto al instrumento y se manifiesta por los cambios que se producen en el artefacto según se va personalizando por el sujeto (Guin y Trouche, 2007), en el proceso gradual de transformación de artefacto en instrumento; es decir en la génesis instrumental.

La figura 3.2, extraída de Guin y Trouche (2007, p. 203) representa la génesis instrumental y los dos procesos que la estructuran

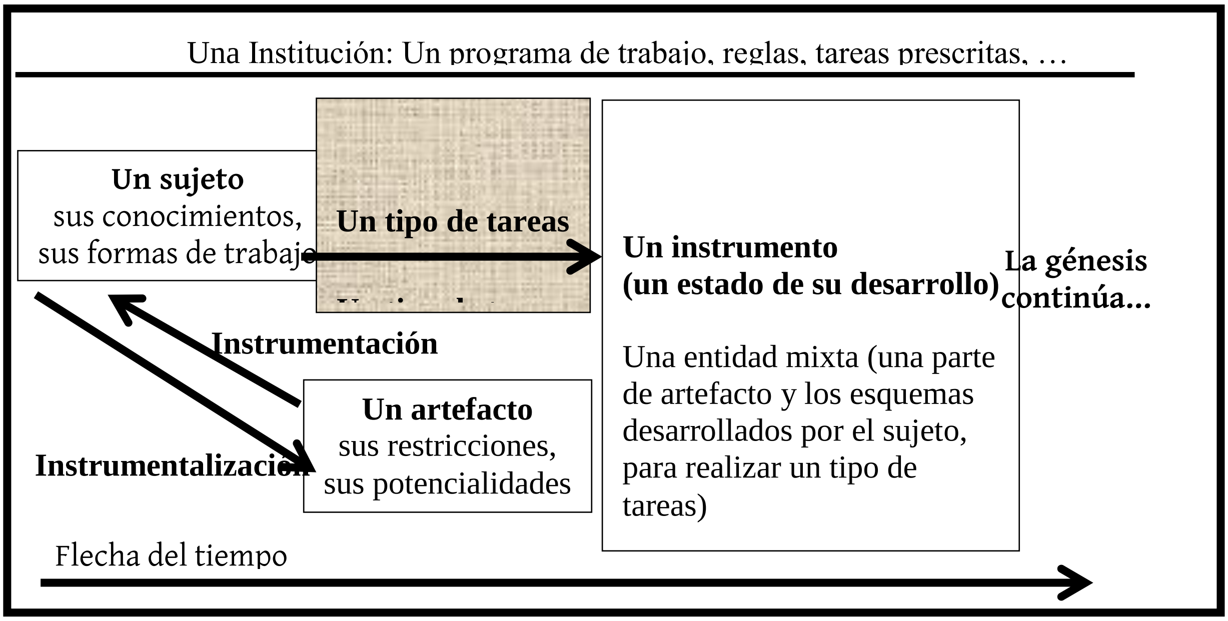


Figura 3.2 Génesis Instrumental

Para la puesta en práctica de este enfoque por el profesor, Trouche (2011, p. 4) plantea varias *vías para la acción:*

- Pensar el uso didáctico de los artefactos debería permitir al profesor anticipar la contribución de los artefactos al logro de las actividades propuestas, anticipar las utilizaciones posibles de los estudiantes, diseñar configuraciones que permiten visualizar, en su caso, el trabajo instrumentado de los estudiantes: para el profesor, se trata, a la vez, de comprender y acompañar el trabajo, pero también de potenciar el trabajo de los estudiantes.

- Establecer una orquestación instrumental implica el diseño de varias configuraciones de artefactos y varios modos de funcionamiento, ajustados a las fases sucesivas de una actividad didáctica (diferentes etapas de la solución de un problema de matemáticas, por ejemplo) y a los objetivos del profesor en cada una de estas fases (estimular los esfuerzos de exploración individual, o el intercambio de ideas, o la explicitación de pruebas o un retorno reflexivo, o ...).

- Un reto para la formación del profesorado no sólo es proponer orquestaciones instrumentales hechas, en mano, a los profesores, sino también de hacerlo mediante la construcción de los elementos organizadores de la actividad de los docentes. Los profesores tienen acceso a través de Internet a un conjunto de recursos cada vez más amplios: es sin duda muy importante pensar en los dispositivos y asistentes metodológicos para que los profesores puedan compartir sus escenarios y diseñar conjuntos de recursos más ricos.

3.3.1 Niveles de organización entre instrumentos y situaciones

Los instrumentos no están aislados. Todo sujeto sabe esto intuitivamente por experiencia; en cuanto la actividad tiene una cierta complejidad, se utilizan una amplia gama de instrumentos, que se movilizan durante la acción, en función de los objetivos, las necesidades y el contexto en el que se lleva a cabo la actividad. La complementariedad de los instrumentos y la lógica de la actividad generan secuencias temporales en el uso de los instrumentos, de forma sucesiva o simultánea.

Pero los instrumentos no sólo se movilizan en situaciones específicas, también están estructuralmente ligados a las dimensiones invariables de algunos tipos de actividades (Rabardel, 2001). La génesis instrumental se fundamenta en estos invariantes y los instrumentos desarrollados permiten la gestión de sus peculiaridades. Rabardel, Bourmaud (2003, p. 678) lo ejemplifican en una situación de la vida cotidiana: *la caja de herramientas que mantenemos en el maletero de nuestro coche, el kit de costura, etc. son grupos de instrumentos que nos permitan lidiar con las principales situaciones que requieren intervención en estos ámbitos cotidianos concretos.*

En el análisis profesional de las relaciones entre los instrumentos y las situaciones, se distinguen tres niveles de organización y análisis (Rabardel y Bourmaud, 2003):

a) Las situaciones con características suficientemente similares, por las tareas a realizar y las situaciones que deben tenerse en cuenta, se pueden agrupar, dando lugar a *clases de situaciones*. Estas *clases* tiene asociadas instrumentos adaptados a las peculiaridades de cada una de ellas y dan lugar a modalidades de actividad que son relativamente estables para la misma *clase* y diferenciadas de una *clase* a otra.

b) Las *clases de situaciones* pueden organizarse en un agrupación de nivel superior, constituyendo las *familias de actividad.* Estas *familias* reúnen y organizan todas las clases de situaciones que corresponden a un mismo tipo de finalidad general de la actividad. En este nivel, puede haber *clases de situaciones* que pertenezcan a más de una *familia de actividad.*

c) El conjunto de todas las *familias de actividad* constituyen un tercer nivel de organización y análisis, que se denomina *Dominio o Ámbito profesional de la actividad.* Este *dominio* incluye todas las *familias de actividad* junto con las *clases de situaciones* que las componen y para cada uno existen los correspondientes grupos de *instrumentos*.

La figura 3.3 (Rabardel, Bourmaud, 2003, p. 678) esquematiza gráficamente las ideas de familias de actividad, clases de situaciones y dominio de actividad profesional

.

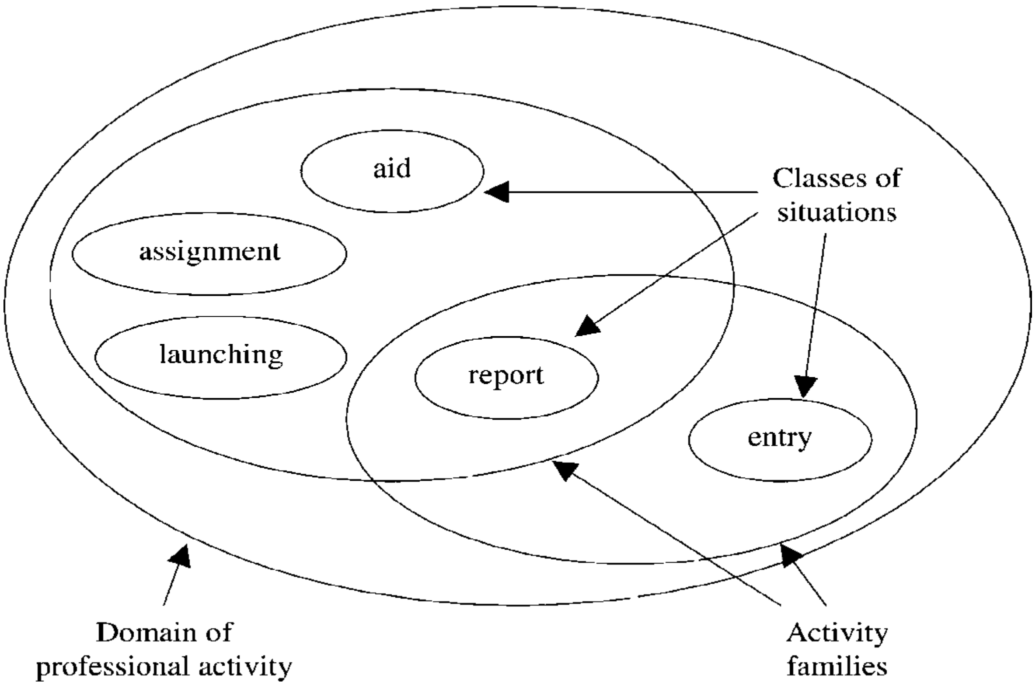


Figura 3.3 Niveles de organización entre instrumentos y tipos de situaciones.

3.4. El Enfoque Documental

En el trabajo del profesor, juegan un importante papel los denominados *recursos* y *documentos* (Gueudet y Trouche, 2008, pág. 7). Partiendo de la idea de que el trabajo del profesor es *esto que él comprende y lo que le comprende en su unidad y en su desarrollo*, (Gueudet y Trouche, 2008, pág. 8) analizan todas las ideas contenidas en esta definición:

- Lo que *él comprende* (en la actividad del profesor) es un conjunto de recursos, en una acepción muy general de este término: desde los materiales curriculares (libro de texto o manual escolar, programas escolares o curriculares, etc.) hasta el trabajo del profesor para construir su propio currículo a desarrollar en clase, pasando por los trabajos de los estudiantes, las interacciones en clase, los consejos u opiniones de otro profesor. Todos ellos son *recursos* para el profesor, ya que sirven para orientar y reorientar su trabajo.

- Lo que *le comprende* es el conjunto de resortes institucionales y sociales: la sociedad, la institución escolar, los colectivos (entre los que se encuentran el profesor y sus estudiantes o los profesores entre ellos).

- La *unidad* del trabajo del profesor se refiere a la concepción de la materia de enseñanza (que se nutre de los recursos disponibles) para él, para sus estudiantes, para los colectivos y las instituciones en las que él participa. Esta concepción es denominada *trabajo documental* y al producto final de este trabajo lo denominan *documento de enseñanza.*

A través de este *trabajo documental*, el profesor construye lo que para él es su *materia*; por tanto, este trabajo es portador de *desarrollo* profesional. En este sentido, el desarrollo profesional es la combinación de un conjunto de procesos en interrelación: la apertura a nuevos recursos (Ball y Cohen 1996); el desarrollo de conocimientos de la enseñanza (Schulman, 1986; Ball, Hill y Bass, 2005) a la vez disciplinares, pedagógicos y curriculares;

la evolución de sus relaciones con los otros actores de la enseñanza y la evolución de sus concepciones sobre la materia.

3.4.1. La génesis documental

El enfoque documental es una extensión de la perspectiva instrumental. Planteado por Gueudet y Trouche (2010, p. 2), estos autores consideran *que el corazón de la actividad del profesor es el trabajo documental, que es buscar, combinar, diseñar, compartir, revisar sus recursos didácticos. En este trabajo, el profesor interactúa con conjuntos de recursos. Estos recursos pueden ser artefactos, que abarcan una realidad más amplia; así, la respuesta de un estudiante es un recurso esencial para el profesor. Durante estas interacciones, el profesor desarrolla lo que llamamos un documento, que incorpora tanto los recursos recombinantes y los patrones de uso, saturado de la experiencia y conocimientos profesionales.* Este proceso de transformación, desde los recursos hacia los documentos, se denomina la génesis documental, y en él también se dan las dos dimensiones de instrumentación e instrumentalización, teniendo un papel importante el contexto y la forma y el tipo de actividad que se esté planteando. La Figura 3.4 (Gueudet y Trouche, 2010, p. 2), resume el proceso de génesis documental, análogamente a la Figura 1, de la génesis instrumental.

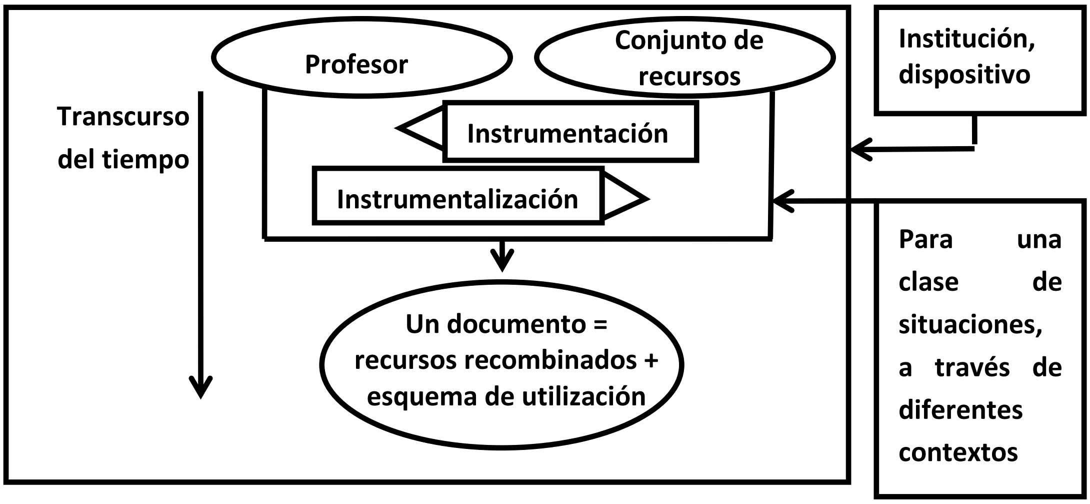


Figura 3.4 Génesis Documental

3.4.2. Los recursos y los documentos

En este enfoque es muy importante la idea de *recurso*. Desde un punto de vista tradicional, los recursos van desde los recursos didácticos, libros de texto tradicionales, guías didácticas, etc., hasta el software de enseñanza, cada vez más abundante en la red y ocupando un papel cada vez más importante. El enfoque documental da un paso más y asume la idea de Adler (2000) que considera recurso del profesor todo lo que contribuya a su proyecto educativo, al mismo tiempo que facilite el replanteamiento y la mejora de su práctica: desde los recursos materiales tradicionales o digitales, hasta las interacciones con los estudiantes o con otros colegas de la profesión.

En cuanto a la idea de *documento*, el enfoque documental hace hincapié en que un documento es *una entidad en desarrollo*, que tiene, en el curso del trabajo del profesor, fases de relativa estabilidad y fases de ruptura, después de cada una de las cuales formará parte de la propuesta didáctica de enseñanza del profesor de una forma más consolidada. Es por ello que el *documento* puede ser considerado como un par en el que la primera componente son los *recursos* y la segunda es el *esquema* organizador de esos recursos, (en el sentido de Vergnaud, 1990). En ese *esquema*, los *invariantes operacionales* son los conocimientos del profesor, a veces implícitos, que son los impulsores de la actividad y también los productos de la misma. Por tanto, un documento es una entidad mixta integrada por un conjunto de recursos disponibles por parte del profesor y un esquema de funcionamiento, que dirige su puesta en práctica.

En palabras de Guedet y Trouche (2010a, p. 2) un documento es una construcción personal resultado de una génesis, fruto de una dialéctica entre el profesor y sus recursos; el profesor modifica los recursos que puede movilizar y estos recursos en movimiento contribuyen a la evolución de sus prácticas y de las concepciones del profesor. Para Pédauque (2006) un documento es el resultado de un proyecto, de una intención, de una enseñanza.

Por otra parte, así como el enfoque instrumental plantea una dialéctica entre los dos entes: *artefacto-instrumento*, el enfoque documental (Gueudet y Trouche, 2010b) considera la dialéctica *recursos-documento*; los primeros los encuentra, elabora o adapta el profesor para construir su proyecto de enseñanza y el segundo, que resulta del primero, es una entidad mixta compuesta por los *recursos* modificados y reorganizados y un *esquema* de utilización.

Se puede representar un documento por la ecuación sintética:

documento = recursos + esquema

Esta aproximación distingue también, en el corazón de la génesis instrumental, dos tipos de procesos imbricados, los procesos de *instrumentación,* cuya actividad principal es la constitución de *esquemas de utilización* de los recursos; y los procesos de *instrumentalización,* mediante los cuales el sujeto concreta y revisa los recursos.

3.4.3. Función Productiva (Instrumentalización) y Función Constructiva (Instrumentación)

El enfoque documental focaliza la atención en el análisis del trabajo del profesor a partir de su actividad productiva: para una clase de situaciones (por ejemplo, "enseñar la noción de función en clase de secundaria"), él reúne los recursos, los trabaja, elaborando un material de enseñanza que pone en práctica en su clase. Esta puesta en práctica no es un acto único, sucederá de nuevo con otros estudiantes y en otros cursos académicos. En varios momentos de esta elaboración y de estas implementaciones, llevará a cabo cambios: en un movimiento de instrumentalización, los recursos involucrados son constantemente revisados por el profesor; en un movimiento de instrumentación, los conocimientos del profesor son cuestionados por los recursos, por su puesta en práctica y por los efectos que conllevan (Gueudet y Trouche, 2010b, p. 5).

De esta forma, la actividad productiva del profesor es también una actividad constructiva (Samurçay y Rabardel, 2004) pues no se limita a producir transformaciones de objetos del mundo exterior (concretamente los recursos en documentos), sino que, también, él mismo se transforma, enriqueciendo su repertorio de recursos y de conocimientos, tanto de *contenido* como *didácticos de contenido*; es decir, el profesor aprende de lo que enseña; esta es la función constructiva de la actividad (Rabardel y Pastré, 2005).

Por otra parte, durante el proceso en el que surgen las funciones constructivas, el profesor lleva a cabo una *internalización* (Wertsch, 1998) que no es siempre observable desde el exterior, ni verbalizable por su parte. Esto mismo ocurre con la instrumentalización, en la que, además, no necesariamente tiene consecuencias inmediatas. Es por ello que es necesario *mirar el trabajo invisible* (Blombreg y otros, 1996). Pero además de ser difíciles de ver, no todos los componentes de las funciones de instrumentación e instrumentalización son directamente verbalizables. Esto es particularmente cierto en el caso de los *esquemas* que, en el enfoque instrumental o documental, debe ser tenido en cuenta. La *acción* es un conocimiento que moviliza el '"conocimiento ya incorporado", y esto es mucho más que verbalizar (Leplat, 2000). Esta dimensión también se aplica a los esquemas cuando se sustentan en *invariantes operacionales* (Vergnaud, 1996) que se encuentren implícitos en el sujeto y no se hayan exteriorizado.

En cuanto a las relaciones entre las funciones productiva y constructiva y la actividad profesional del profesor, Gueudet y Trouche (2008, pág. 15) lo aclaran de forma sencilla:

> *Esta dialéctica de lo productivo y lo constructivo permite tener en cuenta la complejidad de estos procesos: una actividad finalizada tiene un objetivo de producción que no es más que la realización de la tarea dada. En esta actividad, el sujeto se construye también él mismo y modifica las condiciones de producción posteriores.*
>
> *Esta dialéctica no significa que consideremos simplemente el trabajo documental como susceptible de generar un desarrollo profesional, sino que representa un verdadero cambio de punto de vista. No se trata de considerar el trabajo documental como una necesidad dirigida hacia el objetivo del trabajo en clase; el trabajo documental está en el corazón de la actividad profesional del profesor, que se realiza en clase y fuera de clase. Así, el trabajo en clase es analizado como un tiempo de enriquecimiento documental. Desde esta perspectiva, las génesis documentales constituyen la esencia del desarrollo profesional.*

En este punto conviene resaltar las conexiones entre la *función constructiva* de la *génesis documental* y las *mediaciones heurísticas* de las *actividades mediadas por un instrumento*. Las funciones *heurísticas,* que van dirigidas hacia el propio sujeto, son las que permiten identificar los *invariantes operacionales* (*conocimientos en acción*) de los esquemas del profesor, mediante la interacción con el *instrumento* (*documento*). Son esas mediaciones, en las que el sujeto es el propio profesor, las que permiten sacar a la luz el *trabajo invisible.* En este punto los dos grandes enfoques del marco teórico: mediaciones y génesis documental se conectan para dar más rigor y coherencia a la investigación. Esta potencialidad se ejemplificará e ilustrará en el capítulo 7, en el que se ponen en práctica.

3.5. Los Conocimientos del profesor

El modelo de Shulman (1986) establece dos dominios del conocimiento del profesor: conocimientos del contenido (en nuestro caso las matemáticas) y conocimientos didácticos del contenido. Este modelo ha sido completado por Ball, Thames y Phelps (2008), que consideran tres subdominios de cada uno de los dominios establecidos por Shulman. Concretamente:

-Conocimiento del contenido matemático:

- Común
- Especializado
- En el horizonte.

- Conocimiento didáctico del contenido matemático:

- De contenido y la enseñanza
- De contenido y los estudiantes
- Del curriculum.

3.5.1. El Modelo MTSK del conocimiento especializado del profesor

A partir de lo anterior (Carrillo y otros, 2013, 2015) proponen un modelo que contempla la especialización en los dos dominios, tanto en el de los Conocimientos del contenido Matemático (MK) como en el de los Conocimientos Pedagógicos del contenido Matemático (PCK), considerando también las creencias del profesor sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje como *dimensión que permea todo el conocimiento del profesor* (Carrillo y otros, 2013). Ene ste modelo, *se mantiene la perspectiva de comprender la práctica del profesor a través de su conocimiento* (Vasco Mora y otros, 2016). La figura 3.5 ilustra el modelo, en el que se contemplan:

1. Dominio de los *conocimientos matemáticos (MK)*, con los siguientes subdominios:

- *Conocimiento de los Temas (KoT).* Comprende los *contenidos disciplinares* del tema matemático que se aborde, que se encuentran en los manuales y libros de texto conceptuales (definiciones, ejemplos, propiedades, teoremas, etc.) junto con los *aspectos fenomenológicos, significados*, etc., que son propios de los contenidos del tema.

- *Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM).* Se refiere este subdominio al conjunto de conocimientos sobre la estructura de ese conocimiento matemático que se está tratando; son los aspectos epistemológicos del contenido. Estos conocimientos *permiten comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante una visión avanzada.* Es el conocimiento sobre las relaciones entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos.

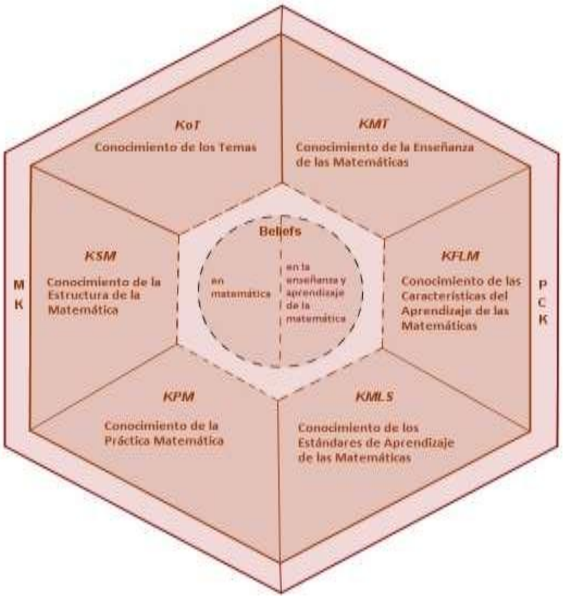


Figura 3.5. Conocimiento especializado del profesor

- *Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).* Comprende los conocimientos: a) sobre las *formas de conocer, crear o producir en matemáticas* (definir, resolver problemas, utilización de modelos, etc.); b) sobre las formas de *comunicación de* y sobre *las ideas matemáticas* (lenguaje matemático, símbolos, notaciones, formas de representación, etc.); c) las formas y tipos de *razonamiento,* así como de demostración y *prueba.* Este subdominio incluye conocimiento de las formas de crear o producir que son características del trabajo matemático (Carrillo y otros, 2013).

2. Dominio del *conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK),* en el que se consideran los subdominios siguientes*:*

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT). Incluye el conocimiento de las estrategias didácticas que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas. También comprende el conocimiento de la potencialidad de los recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido determinado.

- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Comprende el conocimiento sobre: a) las características del proceso de comprensión, estructuración, aplicación, utilización, etc. de los contenidos por los estudiantes; b) el lenguaje asociado a cada contenido (aritmético, geométrico, algebraico, funcional, probabilístico, gráfico, analítico, etc.); c) los errores, dificultades u obstáculos, generales o específicos de esos contenidos, que pueden aparecer en el proceso de aprendizaje del estudiante. E*l KFLM, engloba el conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos de aprendizaje matemático atendiendo a la relación estudiante-contenido. Evita poner al estudiante como el foco principal del proceso al centrarse en el contenido matemático como objeto de aprendizaje* (Flores-Medrano y otros, 2016, en prensa).

- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Incluye: a) el conocimiento acerca de lo que el estudiante debe conseguir según el currículo oficial, y lo que puede alcanzar según su nivel de desarrollo madurativo; b) conocimiento de las capacidades conceptuales, procedimentales que se promueven en cada momento y con cada contenido, así como del nivel que se consigue en el desarrollo de las competencias matemáticas del estudiante. También tiene en cuenta este subdominio lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de los logros de aprendizaje. (Aguilar, A. y otros, 2013, p. 506). El KMLS *incluye el conocimiento de las especificaciones del plan de estudios, la progresión de un año a otro, así como objetivos y medidas de desempeño desarrolladas por entidades externas tales como asociaciones profesionales e investigadores* (Vasco Mora y otros, 2016, en prensa).

3.6. Ejemplos genéricos y conjeturas

El trabajo con ejemplos y casos particulares tiene interés en la búsqueda de conjeturas y en la construcción de una demostración que justifique su veracidad o su falsedad. En el contexto de un PIM, este trabajo se sitúa, habitualmente, en la fase de resolución del problema de investigación y, más concretamente, en la búsqueda de patrones y leyes matemáticas que se quieren utilizar en la demostración que resuelve el problema de investigación planteado. A su vez, la potencialidad de los ejemplos utilizados en las pruebas está condicionada por uno de los tres elementos importantes del conocimiento del profesor sobre la prueba (Stylianides y Ball, 2008), concretamente el que se refiere a la *capacidad de entender y distinguir entre argumentos empíricos y deductivos*. En este sentido*...los argumentos empíricos no pueden contar como pruebas en ningún nivel de la enseñanza, sobre todo porque las discusiones empíricas utilizan modos inválidos de argumentación promoviendo la aceptación de las demandas matemáticas basadas en evidencias incompletas. Además, las discusiones deductivas se asocian a una gama de modos válidos de argumentación [...]. Los ejemplos incluyen los modos de la argumentación asociados al principio de la inducción matemática, la regla de equivalencia de la contraposición y la construcción de los contraejemplos.* (p. 310-311)

En este estudio, se analizarán diferentes episodios con estudiantes, en los que aparecen ejemplos en el proceso de demostración de conjeturas. Para llevar a cabo el análisis utilizaremos diferentes categorías:

En primer lugar la idea de ejemplos genéricos (Masón y Pimm, 1984; Balacheff, 1988; Harel, 2001): Un ejemplo genérico es un objeto solo, particular, que representa el caso general y con el cual puede ser percibida una generalidad (Pedemonte y Buchbinder, 2011, p. 257). La diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una idea abstracta, tienen una estructura subyacente que podemos observar si dejamos a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa. Otra de las principales características de los ejemplos genéricos es que conectan el dominio aritmético con el algebraico (p. 265) lo que permite conectar el nivel de lo concreto con el nivel de lo general. Como plantean Pedemonte y Buchbinder (2011): si los argumentos que sirven para demostrar la conjetura se basan en ejemplos genéricos, y tienen así una estructura deductiva, permiten la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirven como puente entre la argumentación y la prueba (p. 266).

Otra idea importante es la de *generalización de patrones* de Harel (2001). Este investigador ha observado dos tipos distintos de generalizaciones que corresponden a “dos maneras distintas del pensamiento'': *generalización del patrón del resultado* (*result pattern generalization)* (RPG) y *generalización del patrón del proceso* (*process pattern generalization)* (PPG). La peculiaridad de cada uno es que *en la generalización del patrón del proceso* (PPG) *los estudiantes se centran en las regularidades del proceso, mientras que en la generalización del patrón del resultado* (el RPG) *en las regularidades de los resultados* (p. 191). Además, como plantea Pedemonte (2007), los PPG *son requeridos para la construcción de una demostración de tipo inductivo.*

3.7. Argumentación y razonamientos en la prueba

También se utilizarán las ideas de *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* propuestas por Pedemonte (2007) y Pedemonte y Buchbinder (2011). Para ello, previamente, debemos introducir los conceptos de *argumentación constructiva y argumentación estructurante* (Pedemonte, 2007). La *argumentación constructiva* está constituida por los argumentos que contribuyen a la construcción de la conjetura, que pueden ser proporcionados por los *ejemplos genéricos*. La *argumentación estructurante* está formada por los argumentos que justifican la conjetura. Estos argumentos justificativos pueden aparecer a la vez que los constructivos (en este caso las dos argumentaciones son coincidentes) o posteriormente a ellos, una vez que la conjetura se considera un hecho, si la argumentación constructiva es insuficiente para proporcionar una prueba. Cuando los ejemplos genéricos se pueden generalizar fácilmente, pueden facilitar la elaboración de la *argumentación estructurante* y, como consecuencia de ello, la construcción de la prueba.

Una vez aclarados estos primeros conceptos aparece la idea de Unidad cognoscitiva (Pedemonte y Buchbinder, 2011). La unidad cognoscitiva se observa cuando hay una continuidad entre la argumentación constructiva, la argumentación estructurante y la prueba o demostración de la conjetura. Por último se tiene la Continuidad estructural (Pedemonte y Buchbinder, 2011). Esta idea se puede observar cuando la argumentación (constructiva o estructurante) y la prueba tienen la misma estructura lógica; es decir, tienen las mismas conexiones lógicas entre sus proposiciones (p. 259); es decir, son todas de tipo inductivo, deductivo o abductivo. La continuidad estructural se observa si los ejemplos usados para construir y/o justificar la conjetura, se pueden generalizar para la construcción de la prueba (p. 265). En este sentido, ... si la argumentación estructurante se basa en ejemplos genéricos, y tiene así una estructura deductiva, permite la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirvieron como puente entre la argumentación y la prueba permitiendo que la unidad cognoscitiva y la continuidad estructural se observaran (p. 266). De ahí la importancia de los ejemplos de tipo genérico en el paso de la argumentación a la demostración.

En cuanto al tipo de pensamiento utilizado en la construcción de la prueba, tendremos en cuenta, además de los razonamientos demostrativos inductivo y deductivo, el razonamiento abductivo (Peirce, 1960): *La abducción como modelo de inferencia es usada en el proceso de descubrimiento, haciendo que, a partir de un hecho observado y suponiendo que ese hecho es condición necesaria para que se cumpla cierta hipótesis, entonces la hipótesis (de la* *implicación) es más creíble. En un razonamiento abductivo, la hipótesis es la conclusión de un razonamiento, teniendo este último un valor de plausibilidad al proporcionar mayor credibilidad para la hipótesis* (adaptado de Pedemonte, 2007, pág. 647). Este tipo de razonamiento fue modelado por Polya (1954, traducción española 1966) en sus *patrones de razonamiento plausible* en la forma:

$$A \Rightarrow \mathrm{B}$$

$$B \text{ es verdadera}$$

$$A \text{ es más digna de crédito}$$

El razonamiento anterior (Polya, 1954, p. 107; traducción española (1966), p. 283), denominado por Polya *patrón fundamental inductivo,* daría mayor credibilidad a la conjetura *A*, aunque no asegura su veracidad.

CAPÍTULO 4: METODOLOGÍA Y CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. PRESENTACIÓN

El marco teórico expuesto en el capítulo anterior debe adaptarse a las condiciones concretas de la investigación. En este capítulo se va a exponer la metodología de investigación, así como la contextualización de los principales aspectos metodológicos derivados del marco teórico elegido.

4.2. CONTEXTO DEL ESTUDIO

El grupo de estudio está compuesto por 14 alumnos (10 chicos y 4 chicas) con características heterogéneas, pertenecientes a segundo curso de Bachillerato (12 de ellos) y a cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (2 de ellos). Todos ellos estudiantes de un instituto de la Comunidad de Castilla y León, concretamente de la ciudad de Burgos.. Sus edades varían entre 15 y los 17 años. Poseen los conocimientos propios de los estudiantes de su edad y una característica común a todos ellos es que les gustan las matemáticas y tienen unas capacidades por encima de la media de los estudiantes de su edad. Como se desarrolla más adelante, en este mismo capítulo, en la investigación se llevan a cabo tres experimentaciones, en tres cursos diferentes (en la Tabla 4.7. figuran más datos de los estudiantes que participan cada curso).

También participa un profesor, el autor de la tesis, Licenciado en Matemáticas, que imparte la materia de matemáticas en Bachillerato y ESO en ese instituto, con amplia trayectoria profesional.

4.3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La investigación planteada intenta acercarse a la solución de un *problema complejo de la práctica educativa, para el cual no hay pautas claras de actuación, ni soluciones disponibles* (Van den Akker y otros, 2006). Se trata de diseñar, desarrollar y evaluar una intervención educativa a partir de unos materiales de enseñanza, unas estrategias de aprendizaje y un contexto determinados, consiguiendo con ello progresar en el conocimiento sobre las características de estas intervenciones y sobre los procesos de diseño y puesta en práctica.

Para llevar a cabo la investigación, se utilizará la metodología Design-Based Research (DBR), que tiene las siguientes características (Bakker y Eerde, 2013):

1. Su objetivo es desarrollar teorías acerca del aprendizaje y los medios que se han diseñado para apoyarlo.
2. Tiene un carácter intervencionista. Las intervenciones tienen lugar en el ambiente de aprendizaje a medida que éste ocurre en la clase y, por tanto, los métodos miden mejor lo que los investigadores quieren medir, que es el aprendizaje en situaciones naturales.
3. Incluye componentes prospectivos y reflexivos. En la aplicación de la hipótesis de aprendizaje (la parte prospectiva) el investigador se enfrenta a las conjeturas con aprendizaje real que él mismo observa (parte reflexiva). La reflexión puede

hacerse después de cada experimentación y puede llevar a cambios en el diseño inicial, de cara a la siguiente experimentación; es decir, que la formulación de hipótesis se puede hacer antes y después del experimento.

4. Su naturaleza es cíclica. Los ciclos se articulan en las siguientes fases: preparación y diseño, experimentación, y análisis retrospectivo. Los resultados del análisis retrospectivo sirven para el comienzo, si es el caso, de una nueva fase de diseño.

5. El desarrollo interno de la teoría se tiene que hacer a través del trabajo práctico. El trabajo se desarrolla en un dominio específico (de ahí que la metodología DBR sea *humilde*), pero el dominio debe ser lo suficientemente general como para ser aplicable en diferentes contextos (transferible).

En el contexto de la investigación que se presenta, no se pretende crear teoría de *research design,* sino que de lo que se trata es de utilizar este teoría para fundamentar las prácticas de las experimentaciones realizadas, de manera sistemática e informada.

Una definición amplia de esta metodología la describe como una serie de acercamientos, con el intento de producir nuevos teorías y prácticas que explican y potencialmente afectan a la enseñanza y al aprendizaje, desde un enfoque de la práctica (Barab y Squire, 2004). Se trata de diseñar y desarrollar intervenciones realizables y eficaces, estudiando cuidadosamente, en sus contextos, las versiones sucesivas (o prototipos) de las intervenciones. Por tanto el proceso de investigación tiene un carácter cíclico: las actividades del análisis, del diseño, de la evaluación y de la revisión se iteran hasta conseguir un equilibrio de satisfacción entre los ideales previstos y los niveles alcanzados en la puesta en práctica (Reeves, 2006).

Cada iteración o ciclo es un *microciclo de la investigación*, (McKenney, 2001) es decir, un paso en el proceso de desarrollo de la misma, e incluirá la *reflexión sistemática* (McKenney, 2001) sobre los aspectos teóricos, a partir de los datos recogidos. Esta reflexión ayuda a comprender el cómo y el por qué del funcionamiento de la intervención en ese contexto concreto, y permitirá ir generando, en sucesivas iteraciones, principios de intervención, dando como resultado, al final del proceso, unos *principios del diseño* (Wademan, 2005) o *declaraciones teóricas* (Van den Akker,1999, 2006) que constituyen una *teoría local* para el contexto en el que se trabaja: *en el contexto Z la intervención X (con ciertas características) conduce a los resultados* $Y_1, Y_2,..., Y_n$ (Plomp, T., 2007).

Los principios del diseño son las declaraciones heurísticas para las que Van den Akker, 1999) desarrolló el formato siguiente: Si usted desea diseñar la intervención X para el propósito/la función Y en el contexto Z, entonces le aconsejan dar a esa intervención las características A, B, y C [énfasis substantivo], y hacer eso vía los procedimientos K, L, y M [énfasis procesal], debido a las discusiones P, Q, y R. (Van den Akker, 1999)

Por el contrario, si en un cierto ciclo el prototipo de intervención no da lugar a los resultados deseados, se puede concluir que los principios del diseño (o la teoría de la intervención) aplicados no son (todavía) eficaces. Esto tiene que dar lugar a un reajuste o a un refinamiento de la intervención, que va en paralelo con el refinamiento de la teoría de la intervención o de la teoría del diseño.

A este respecto, es importante observar que la investigación de diseño sigue un acercamiento holístico, y no focaliza la atención en variables aisladas. (Van den Akker y otros, 2006). Estos autores señalan que los investigadores de diseño se centran en los objetos y los procesos específicos (intervenciones) en contextos específicos, pero intentan estudiarlos como fenómenos integrales y significativos, sin buscar generalizaciones a contextos cualesquiera. Las generalizaciones resultantes, en caso de conseguirse, son de tipo analítico (Yin, 2003), en contraste con la generalización estadística donde el investigador puede generalizar desde la muestra a la población.

El proceso metodológico de una investigación de diseño tiene 4 fases (Nieveen y otros, 2006):

1. Investigación preliminar: análisis minucioso del contexto y del problema, marco conceptual basado en la revisión de la literatura.

2. Experimentación de prototipos: precisar pautas del diseño de prototipos, los prototipos óptimos en cada iteración, la evaluación formativa y la revisión de los ciclos iterativos del diseño y de la evaluación formativa.

3. Evaluación sumativa: grado de transferencia, evaluación de la eficacia a escala local.

4. Reflexión y documentación sistemática: a lo largo de todo el proceso, en cada ciclo iterativo. Al final, se analizan los ciclos globalmente, especificando los principios del diseño y su acoplamiento al marco conceptual.

Por otra parte, como la investigación se puede encuadrar dentro de los denominados *estudios de validación*, (Gravemeijer y Cobb, 2006) que tienen como objetivo el avance de las teorías de la enseñanza y del aprendizaje en un dominio específico y a nivel local (en nuestro caso a nivel de secuencia educacional), las fases para su desarrollo son coherentes con las del proceso metodológico (Gravemeijer y Cobb, 2006):

1. Preparación del ambiente: elaborando un diseño educacional preliminar basado en un marco interpretativo;

2. Experimentación en clase: probando y mejorando el diseño educacional y desarrollando una comprensión de cómo trabaja;

3. Análisis retrospectivo: estudiando el proceso entero, para contribuir al desarrollo de una teoría educacional local y/o mejora de del marco interpretativo.

En cuanto a la evaluación formativa, después de cada iteración con el prototipo diseñado, (Nieveen, 1999) describe los criterios genéricos que deben cumplir las investigaciones de diseño:

1. Relevancia o Validez de contenido: el diseño de la investigación y sus componentes se deben basar en el conocimiento científico avanzado (basado en el estudio del estado del arte).

2. *Consistencia o Validez de la construcción*: en todo momento de la investigación deben relacionarse todas las partes del diseño.

   Si se cumplen estos requisitos, la intervención se considera válida.

3. *Practicabilidad:* los profesores o principiantes consideran que la intervención es trasladable al aula y que los materiales son fáciles de usar (con un diseño y desarrollo adecuados)

Si se cumplen todos los requisitos anteriores, se considera una intervención *práctica.*

4. *Eficacia o Efectividad*: la investigación consigue los resultados esperados y deseados.

Como puede observarse, cada criterio tiene preminencia en una o varias de las fases de la investigación.

Una de las características de las investigaciones de diseño es que suelen desarrollarse en colaboración entre los investigadores y los profesores de aula (los prácticos). Cuando el investigador es el propio profesor, (McKenney, Nieveen, y Van den Akker, 2006) proponen varias medidas a tomar para resolver adecuadamente este problema:

1. Plantear la investigación abierta al escrutinio, las miradas y la crítica de profesionales que no sean el investigador.

2. Desde el principio asumir el papel de investigador crítico con todo lo que se haga. Habitualmente esto suele ocurrir más en las últimas fases de la investigación.

3. Tener una buena calidad del diseño de la investigación. Para ello se deben cuidar:

a) la configuración de fuertes cadenas de razonamiento;

b) que todas las partes del diseño son igualmente importantes;

c) el uso de la evaluación por triangulación. En ella, evitar la influencia de un investigador específico;

e) la prueba empírica de la utilidad y de la eficacia de la intervención;

f) la documentación, el análisis y la reflexión sistemáticos del diseño, desarrollo, proceso de la evaluación y de la puesta en práctica y sus resultados;

g) atención a la validez y la confiabilidad de datos y de instrumentos:

h) aplicar variedad de métodos y estrategias; por ejemplo, utilizar observadores, a otros investigadores como críticos, etc.

Todas estas medidas serán tenidas en cuenta, de manera que este problema no tenga ninguna influencia en el desarrollo de la investigación.

4.4. CONTEXTUALIZACIÓN DEL MARCO TEÓRICO A NIVEL METODOLÓGICO

Los capítulos 2 y 3 han descrito el marco teórico de la investigación. En este apartado se va a llevar a cabo la contextualización a nivel metodológico del marco teórico. Para ello:

1. Se va a caracterizar y definir la tarea principal sobre la que se vertebra esta investigación: la denominada Proyecto de Investigación Matemática (PIM).

2. Se va a adaptar a la investigación los modelos surgidos de la Teoría de la Actividad y, más concretamente, las actividades mediadas por un instrumento de tipo documental, concretándose el tipo de mediaciones que surgen en función del caso que se trate.

3. En tercer lugar se va a explicar el contexto de las experimentaciones llevadas a cabo en esta investigación.

4.4.1. Definición y estructura de un PIM

El Capítulo 2 hace un recorrido por los diferentes tipo se tareas matemáticas, dedicando un apartado específico a los PIM, analizando las características de este tipo de tareas y presentando varios ejemplos de ellas. A este respecto, en el contexto de esta investigación, surge una primera duda sobre si se puede dar por conocida la estructura de un PIM, a semejanza de un proyecto de investigación matemática de los que se desarrollan en el contexto de la Universidad. Hay muchas razones que inducen a pensar que, al menos entre el profesorado de Secundaria, no se tiene un conocimiento pleno:

1. Los PIM, de los que se habla en este investigación, se desarrollan en un contexto de Bachillerato, sin tradición en desarrollar este tipo de proyectos y con algunas variables implicadas en el proceso, que no han sido estudiadas suficientemente: los estudiantes, los profesores y los contenidos matemáticos.

2. El estudiante se acerca a la investigación por primera vez, por tanto, necesita conocer la estructura de la tarea, del proceso de investigación, clarificar los contenidos de las actividades que debe desarrollar, resolver las dificultades que puedan surgir y conseguir, en la medida de lo posible, los objetivos propuestos (resolución del problema de investigación y aprendizajes que se esperan del proceso). En un principio, él no conoce nada de esto y, por tanto, necesita un tutor que le guíe y le ayude en las dificultades.

3. El profesor que va a dirigir un PIM, es muy probable que se acerque a la investigación por primera vez, porque en su formación inicial no tuvo este tipo de experiencias. Por ello necesita adquirir *conocimientos científicos de contenido*: método científico, proceso de descubrimiento, fases, estructura, metodologías, y tipos de investigaciones matemáticas; y *conocimientos pedagógicos de contenido* en relación con: a) los PIM (tipos, estructura y fases de los proyectos de investigación); b) con el estudiante (tareas a realizar, resolución de dificultades, aprendizajes a conseguir, interacciones con el profesor y con otros estudiantes, etc.); c) el currículo (situación de los PIM en el currículo, contenidos curriculares

más adecuados para llevar a cabo un PIM, problemas ideales para generar PIM, nivel de profundización en un PIM, tipos de PIMs para proponer a los estudiantes); d) el papel del profesor en el desarrollo de un PIM (tipo de ayuda a prestar al estudiante y nivel de intervención en el proceso).

Una vez aclaradas algunas circunstancias que hacen pertinente la investigación, así como la no trivialidad de las actividades que conlleva un PIM, se desprende, como consecuencia casi obligada después del análisis realizado, la necesidad de proponer una definición de PIM, acompañada de unos comentarios explicativos sobre algunos de los términos utilizados:

Un Proyecto de Investigación Matemática (PIM) es una *tarea de investigación abierta,* en la que, entre otras *actividades*, se desarrolla un *proceso de investigación* de contenido matemático.

Un PIM tiene cuatro fases:

Fase 1. Planteamiento del problema de investigación (elección de un contexto y, dentro de él, un problema a resolver)

Fase 2. Elaboración de un plan (lecturas, conocimientos matemáticos necesarios, pasos a dar,...)

Fase 3. Ataque y resolución del problema de investigación (en esta fase es donde se desarrolla el *proceso de investigación*)

Fase 4. Elaboración de un *informe científico* sobre el proceso.

El *Informe científico* final tiene la siguiente estructura:

1. Fundamentación del PIM: Motivación y justificación, problema de investigación, objetivos, matemáticas necesarias para la resolución del problema y estado de la cuestión.

2. Descripción del proceso de investigación: metodología, resolución del problema, resultados.

3. Resultados y conclusiones: nivel de consecución de objetivos, puntos fuertes y débiles de la investigación, líneas y problemas abiertos para futuras investigaciones, reflexiones personales sobre el proceso (dificultades, aprendizajes, etc.)

4. Bibliografía.

5. Anexos.

Como se puede observar, en la definición hay algunos términos señalados que pueden requerir alguna explicación añadida. A este respecto, se debe tener en cuenta que:

- El término tarea se refiere a que el PIM es una propuesta de trabajo del profesor hacia el estudiante. Esa tarea requiere, para su consecución, de unas actividades por parte del estudiante. El término actividad se reserva para las acciones que emprende el estudiante.

- El término proceso de investigación hace mención a la parte del PIM en la que el estudiante desarrolla un conjunto de actividades con el objetivo de resolver el problema de investigación. En esas actividades, pone en práctica diferentes procesos matemáticos (particularización, generalización, conjeturas,

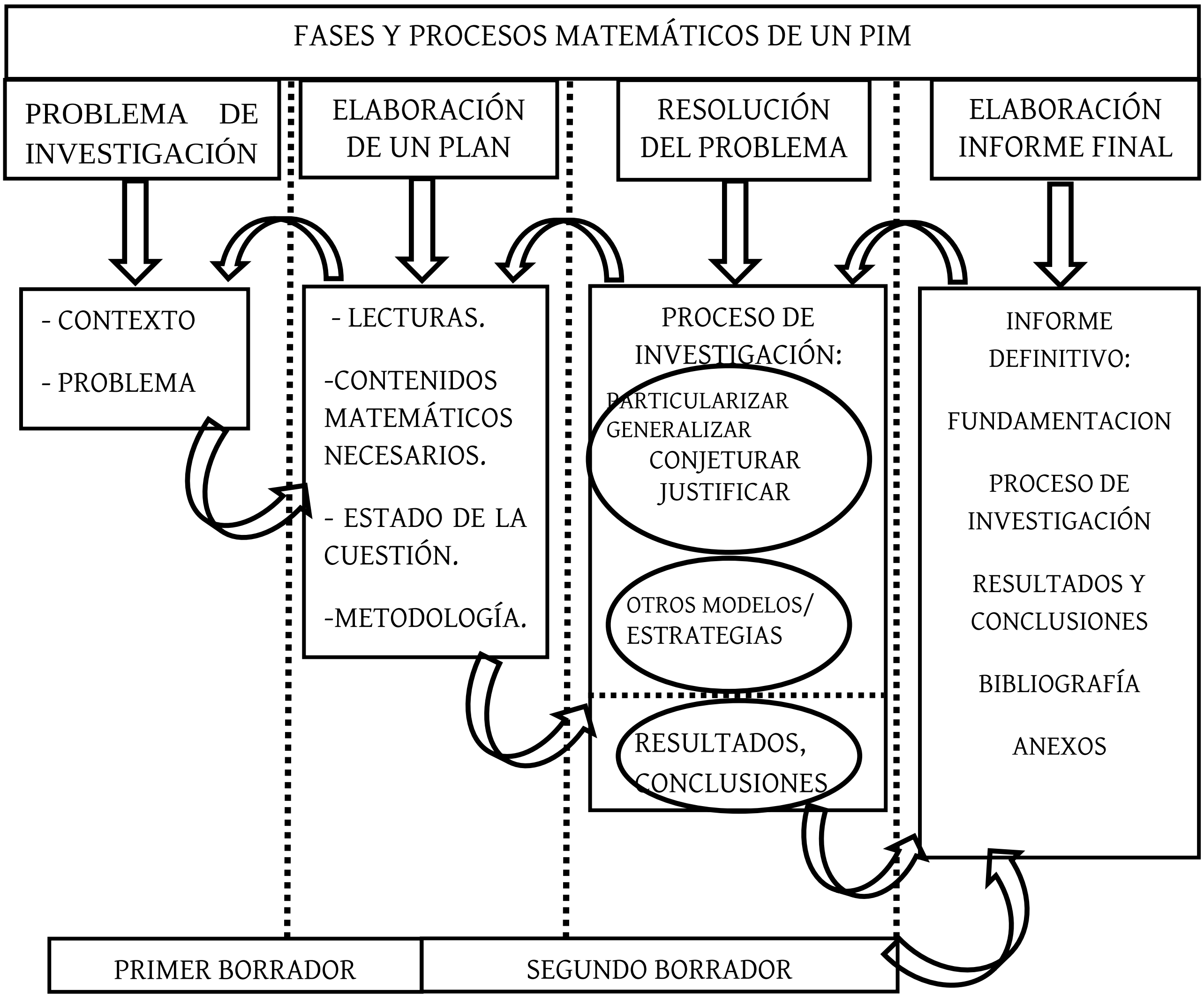


Fig. 4.1. Fases de un PIM y procesos matemáticos que se ponen en práctica

justificaciones, otras estrategias heurísticas, modelos de R.P., modelización matemática, contextualización, conexiones entre contextos, etc.) que están asociados a la naturaleza del problema de investigación planteado. Algunos autores denominan investigación a lo que aquí se denomina proceso de investigación. El proceso de investigación es una parte del PIM, no es todo; es precisamente la parte en la que el estudiante investiga.

- El término *abierta* podría parecer redundante, porque un PIM siempre es una tarea abierta, pero se ha introducido en la definición para remarcar que es una tarea en

la que la meta no está fijada (cerrada) de antemano; es el estudiante el que decide la meta o metas a conseguir con las actividades que desarrolle.
- El *informe científico* es la memoria habitual de una investigación científica. Es muy importante para el estudiante por su carácter formativo y por las exigencias de reflexión rigurosa y exhaustividad que conlleva.

Valorando las dificultades y la complejidad, se presenta en la Fig. 4.1. una primera aproximación gráfica de las fases de un PIM, de algunos procesos matemáticos que puede poner en práctica el estudiante y de las tareas más importantes en cada una de ellas.

4.4.2. El modelo de actividad mediada por un instrumento y los conocimientos del profesor

La contextualización del marco teórico de la Teoría de la Actividad en la interacción persona - herramienta en esta investigación tiene unas características singulares. El modelo de actividad mediada por un instrumento se ha adaptado al instrumento con el que se va a trabajar (documentos del PIM), en sus distintas componentes. Ello ha propiciado la generación de unos modelos explicativos de *casos*, que podrían formar parte de los resultados de la investigación, por su alta adaptación y eficacia para la realización de los análisis posteriores.

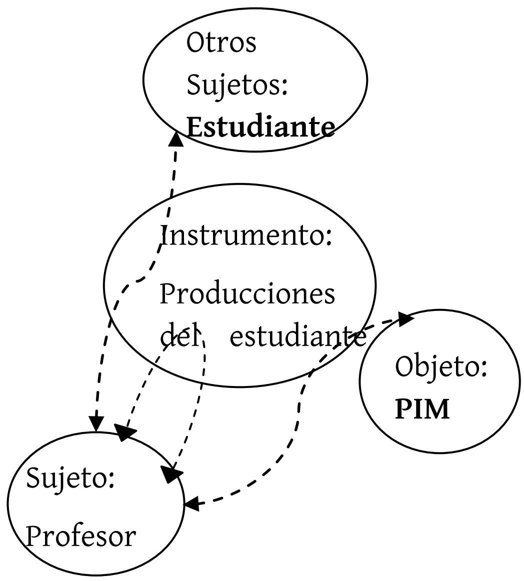


Figura 4.1. Actividades mediadas. Caso 1

Actividad mediada. Caso 1

Dentro del marco de las actividades mediadas por un instrumento, denominaremos Caso 1 (Figura 4.1.) aquel en el que:

a) el *sujeto* es el profesor que, a través del trabajo con el instrumento, genera mediaciones dirigidas hacia el objeto de la actividad y hacia el otro sujeto (el estudiante);

b) el *instrumento* mediador es la producción del estudiante, cuyo *artefacto* se concreta en un documento o borrador de trabajo, que denominaremos en adelante como **I1 (Instrumento nº 1),** que es analizado por el profesor, y cuyo *esquema* asociado, o *parte psicológica del instrumento*, se va a analizar en el proceso de mediación.

c) el *objeto* de la actividad es el PIM: su consecución por parte del estudiante y la contribución al mismo por parte del profesor. La producción del estudiante es una aproximación o borrador de trabajo más o menos terminado;

d) el otro sujeto que es el estudiante, con el que también se producen mediaciones a través del instrumento.

Como se puede deducir del modelo de actividad *mediada por un instrumento*, en el Caso 1 se producen actividades mediadas a través del instrumento entre los siguientes componentes:

- Mediaciones profesor-estudiante. Entre el profesor y el estudiante se producen actividades mediadas por el instrumento. Éstas pueden ser:

1) Mediaciones profesor-estudiante epistémicas epistémicas. Ellas permiten al profesor conocer, del estudiante, sus esquemas de pensamiento, su forma de razonar, su nivel de desarrollo de la competencia matemática, su nivel de conocimientos del tema abordado, los códigos y símbolos que utiliza, las notaciones empleadas, etc.

2) Mediaciones profesor-estudiante pragmáticas. Estas le permiten al profesor ver cómo aborda las tareas el estudiante, los caminos que toma; la eficacia de sus conocimientos para conseguir la meta, cómo comunica las ideas matemáticas, las dificultades que encuentra, ver si el estudiante aborda las distintas fases del PIM adecuadamente, etc. Todo ello encaminado a influir en el estudiante, modificar sus esquemas de pensamiento y razonamiento, sus errores o deficiencias de tipo conceptual o procedimental, mejorar su competencia matemática, etc.

3) Mediaciones profesor-estudiante reflexivas o heurísticas. Con ellas el profesor gestiona el proceso, toma decisiones que ayuden al estudiante a conseguir la meta, evalúa el desarrollo del proceso y el nivel de consecución de los objetivos y, en definitiva, coordina el proceso.

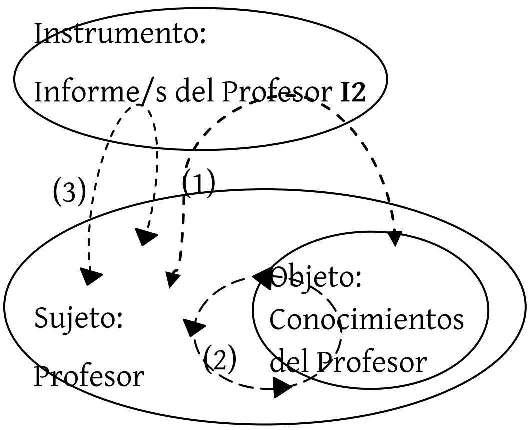


Figura 4.2. Actividad mediada. Caso 2

- Mediaciones entre el sujeto (profesor) y el objeto (el PIM), que denominaremos M-S-O:

1) M-S-O epistémicas. Son las que le permiten al profesor profundizar en el objeto de la actividad; por una parte, la resolución del problema de investigación del PIM, conocer a fondo su complejidad, su envergadura, los conocimientos matemáticos necesarios para resolverlo, etc.; y por otra la elaboración del informe final por parte del estudiante, la estructura del documento, las dificultades del estudiante en su elaboración, etc.

2) M-S-O pragmáticas. Con ellas el profesor puede analizar cómo se puede abordar el PIM, la eficacia y posibilidades de consecución de la meta por el estudiante, la adecuación o no del PIM planteado, modificarlo parcialmente o más globalmente, plantear la profundización en alguno de sus aspectos, etc.

3) M-S-O reflexivas o heurísticas. Estas le permitirán, mediante la reflexión personal, la toma de notas y anotaciones con orientaciones, comentarios, valoraciones

etc., gestionar, valorar y decidir, a nivel personal o con el estudiante, sobre aspectos del PIM.

- Mediaciones entre el sujeto (profesor) y el instrumento (M-S-I):

1) M-S-I epistémicas, que le permiten el conocimiento del artefacto y de los esquemas asociados.

2) M-S-I pragmáticas, que le permiten analizar la adecuación de su funcionamiento, la eficacia para la consecución de la meta u objeto de la actividad.

3) M-S-I reflexivas o heurística, que le permiten la gestión y control, decisiones sobre modificaciones, extensiones, coherencia, etc. del instrumento.

Actividad mediada. Caso 2

El Caso 2 de actividad mediada por un instrumento se ha representado en la Fig. 4.2, en la que se puede observar que: a) el sujeto es el profesor; b) el instrumento es el informe del profesor (que denominaremos **I2**: Informe nº 2), que es uno de los resultados obtenidos después de producirse la actividad mediada del Caso 1. La estructura de artefacto es el documento escrito, con sus códigos, símbolos, etc., en el que se concreta el informe y la estructura psicológica o esquema asociado es el conjunto de saberes del profesor, marco teórico en acción, utilizado a la hora de elaborar el informe; c) el objeto es el análisis, explicitación y concreción del modelo de conocimientos que tiene el profesor, por lo que el objeto es una parte del sujeto.

Es necesario aclarar que, para el análisis de los conocimientos del profesor, se utilizará el modelo de Shulman con aportaciones del modelo MTSK como marcos referenciales.

Como puede observarse en la figura 4.2, en el Caso 2 hay actividad mediada entre el sujeto y el objeto a través del instrumento (denotadas por 1); hay mediaciones entre el sujeto y el objeto, no mediadas a través del instrumento (denotadas por 2) y, por último, hayactividad mediada entre el sujeto y el instrumento (denotadas por 3). Se presentan todas en las tablas 4.3. y 4.4.

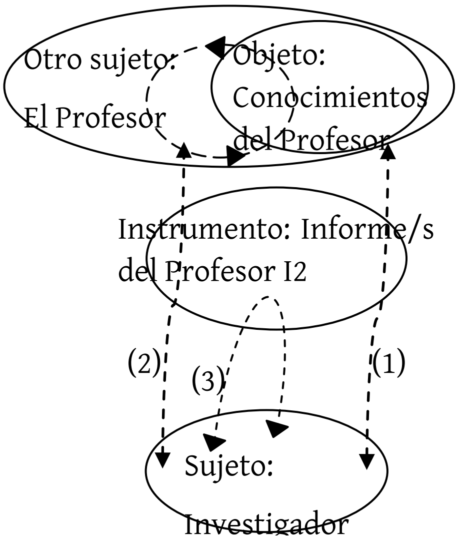


Figura 4.5. Variante del Caso 2

Antes de finalizar la descripción del Caso 2, es necesario señalar que admite una variante (véase la figura 4.5) en la que el sujeto de la actividad mediada es el investigador, que se plantea como objeto (meta) el conocimiento y estudio del sistema de conocimientos del profesor, siendo éste último el otro sujeto de la actividad. Como puede observarse, tanto en el Caso 2 como en esta variante, el instrumento y el objeto de la actividad coinciden, no así el sujeto, que en uno es el propio profesor y en el otro es el investigador. Esta variante añade versatilidad a la validez del Caso 2 como instrumento para el análisis.

Instrumentos. Su estructura

Como se ha visto en los dos apartados anteriores, los Casos 1 y 2 constituyen dos contextos en los que se producen actividades de mediación a través de sendos

CASO 2. MEDIACIONES SUJETO-OBJETO		
MEDIACIONES EPISTÉMICAS	MEDIACIONES PRAGMÁTICAS	MEDIACIONES HEURÍSTICAS
-Conocimiento de los subdominios del marco de conocimientos del profesor (del contenido matemático y didácticos del contenido matemático) en relación con el tema de trabajo del PIM. -Conocer los conocimientos del profesor, necesarios para el desarrollo del PIM	-Eficacia del marco de conocimientos del profesor para explicar el desarrollo del PIM y los resultados del estudiante; es decir, si explican las situaciones y orientan el trabajo del estudiante. - Identificación de ideas del estudiante (conceptos, métodos, enfoques, etc.) no contemplados en los conocimientos del profesor ni previstos por él (por su alto o bajo nivel idoneidad, eficacia, originalidad, etc.) - Detección de conflictos cognitivos y desajustes en los conocimientos del profesor (de contenido matemático y didácticos de contenido): conocimientos ineficaces, parcialmente inadecuados, erróneos, nuevos, etc. - Detección de desajustes en las creencias del profesor	- Constatación, mediante la reflexión, el análisis y la comparación, de las diferencias del marco de conocimientos del profesor con el modelo teórico. - Elaboración de anotaciones, valoraciones, etc. de todo ello. -Toma de decisiones sobre los conflictos cognitivos detectados, teniendo en cuenta las creencias del profesor. -Propuestas de consolidación o modificación del marco de conocimientos del profesor: a) Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces, que explican adecuadamente las situaciones. b) Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.) c) Modificación de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos d) Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos e) Consolidación o modificación de las creencias del profesor.

Tabla 4.3 Caso 2. Actividad mediada Sujeto-Objeto

instrumentos **I1** e **I2.** Se completa la información anterior con la descripción pormenorizada de ellos:

- Instrumentos. Se dispone de dos instrumentos cuyos diseños son de *lápiz y papel,* en el marco de la *génesis documental*:

a) Los documentos que contienen las producciones de los estudiantes; concretamente los informes de progreso del PIM y el informe final del mismo (que se han denominado por **I1**);

b) Los informes y anotaciones del profesor sobre las producciones de los estudiantes (que se han denominado como **I2)**.

- Estructura de los instrumentos. Cada uno de los instrumentos tiene una estructura formada por:

CASO 2. MEDIACIONES SUJETO-INSTRUMENTO		
MEDIACIONES EPISTÉMICAS	MEDIACIONES PRAGMÁTICAS	MEDIACIONES HEURÍSTICAS

- Conocimiento de la estructura artefacto del instrumento (informe del profesor): códigos utilizados, símbolos y notaciones, etc. -Conocimiento del esquema asociado al instrumento: Identificación de los tipos de conocimientos (de contenido y pedagógicos de contenido) del PIM; encuadre de conocimientos en los subdominios - Conocimiento profundo del objeto de la actividad	- Identificar aspectos del informe del profesor que no expliquen de manera adecuada las tareas y situaciones del estudiante. - Situar los conocimientos de contenido y didácticos de contenido en cada uno de los dominios. Identificar los que se pueden encuadrar en más de un dominio - Identificar conocimientos del dominio de conocimientos de contenido que también se pueden encuadrar en el dominio de los didácticos de contenido y viceversa - Detección del nivel de eficacia y adecuación del instrumento (artefacto y esquema asociado) para orientar al profesor hacia la meta: la identificación y mejora del marco personal de conocimientos del profesor	- Elaboración de anotaciones, comentarios y valoraciones en el informe del profesor. - Contextualización del modelo MTSK a los contenidos matemáticos del PIM y a las situaciones y tareas del estudiante. - Toma de decisiones sobre las modificaciones y mejoras a introducir en el informe del profesor. -Toma de decisiones sobre la asignación de subdominios a los conocimientos que aparecen, teniendo en cuenta las creencias del profesor.
Figura 4.4 Caso 2. Actividad mediada Sujeto-Instrumento		

a) *Artefactos* compuestos por los signos, símbolos y códigos que expresan conjeturas, demostraciones, soluciones de los problemas a resolver, junto con lápiz, papel, etc., que producen y modifican las producciones o el informe;

b) *Esquemas asociados*. Como los esquemas se organizan según el objeto prioritario que se le asigna al instrumento, para el caso del instrumento **I1**, el esquema asociado está compuesto por: la *meta* (consecución satisfactoria del PIM); las *reglas de acción* (las normas para la búsqueda de información y el control de la misma); los *invariantes operacionales* (conocimientos en acción del estudiante, constituyen la base para avanzar en la consecución de la meta y están implícitos en el estudiante); los *razonamientos o posibilidades de inferencia* (permiten llevar a cabo las acciones que se derivan de las componentes anteriores). Para el caso del instrumento **I2**, sus componentes son: la meta (averiguar si los PIM desarrollados por los estudiantes pueden modificar los conocimientos del profesor (modelo MTSK u otro); las *reglas de acción* (las normas para la búsqueda de información y el control de la misma); los invariantes operacionales (conocimientos implícitos del profesor); razonamientos (lógica, inferencias).

4.4.3. Génesis documental y mediaciones heurísticas

El marco teórico del capítulo 3 nos proporciona argumentos para la justificación del proceso de instrumentación en la Génesis documental (del recurso al sujeto/profesor) y de las mediaciones heurísticas (sujeto-documento-sujeto) dentro de la actividad mediada por un documento.

En la investigación, cuando se analicen los cambios que se producen en los conocimientos del profesor como consecuencia de las interacciones con el documento del PIM, elaborado por los estudiantes o por él mismo, capítulo 7, se va a trabajar en un contexto de Génesis documental y de mediaciones heurísticas. Esos dos procesos no se van a analizar por separado, sino que se conectarán entre sí. Se explican las conexiones a continuación.

Existe una conexión clara entre estos dos procesos, ya que no se dan por separado, sino que se desarrollan simultáneamente de forma imbricada. Presentamos la Figura 4.6, en la que se pueden ver los dos procesos y sus relaciones.

Esta síntesis de los dos procesos facilita el análisis para la detección de cambios en los conocimientos del profesor, a la vez que potencia el papel de las mediaciones heurísticas,

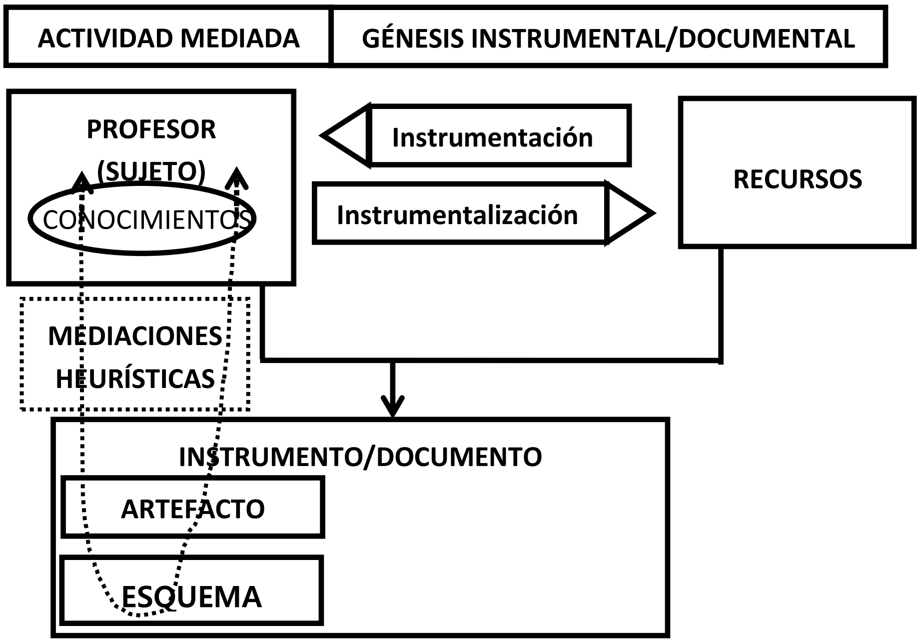


Figura 4.6. Conexiones entre la Génesis Documental y las mediaciones heurísticas

cuyo principio y final se sitúan en el profesor, siendo el objeto de la actividad mediada una parte del propio profesor (sus conocimientos) como se ha explicado en el Caso 2. La Figura 4.6 fortalece los planteamientos gráficos del Caso 2 citado anteriormente.

En este proceso de análisis sucesivo de los episodios que componen el recurso (informe del estudiante), es donde se producen las mediaciones (epistémicas, pragmáticas y heurísticas) y, simultáneamente, tienen lugar las dos funciones de la Génesis Documental, la función constructiva y la función productiva, entre el recurso y el profesor-investigador. Fruto de estas interacciones:

1. El recurso (informe del estudiante) se va transformando en el *documento* (recurso + esquema asociado), un instrumento de alto valor didáctico para el profesor.
2. El profesor se va cuestionando aspectos de su marco de conocimientos y se va transformando como profesor.

En la tesis hay un caso de Génesis Documental en el transcurso del tiempo; concretamente, en cada una de las tres experimentaciones llevadas a cabo. Este caso es el relativo a los tres PIM realizados por los estudiantes con el tema común de las tablas bidimensionales cuyas filas y columnas forman progresiones aritméticas. Estos PIM son analizados en los puntos 5.5., 6.2, 6.3 y 7.3 de la tesis. La Génesis Documental es tan fructífera que al final del proceso, los distintos recursos analizados han generado, para el profesor, un *Documento* consistente en una verdadera teoría matemática de conocimientos nuevos que generaliza el concepto de progresión aritmética tradicional. Este *Documento,* generado a partir de los recursos (informes de los estudiantes) no es la suma de los tres, sino que contiene además el esquema asociado, que se genera en la mente del profesor, que le confiere un valor didáctico para el profesor.

4.5. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

En el desarrollo de la investigación, se han llevado a cabo tres experimentaciones, cada una de ellas en un curso académico, con metas y contenidos diferentes. Los estudiantes que han participado son: 11 de segundo curso de Bachillerato, con 17 años de edad, y 2 de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, con 15 años. A continuación, se explican los primeros datos en forma gráfica (Tabla 4.7):

EXPERIMENTACIÓN	Nº 1	Nº 2	Nº 3
Nº DE SUJETOS (Estudiantes)	4+1	1+5	1+2
ORIENTACIONES EN LAS MEDIACIONES	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ OBJETO	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ ESTUDIANTES	PROFESOR ↓ INSTRUMENTO ↓ PROFESOR
ELEMENTO PRIORITARIO EN LA MEDIACIÓN	OBJETO-META (PIM)	LOS SUJETOS (ESTUDIANTES)	SUJETO INVESTIGADOR (PROFESOR)
MEDIACIONES PRINCIPALES	PRAGMÁTICAS	EPISTÉMICAS	HEURÍSTICAS

Tabla 4.7. Experimentaciones en la investigación

Como se puede observar en la tabla 4.7, en cada una de las experimentaciones se dirige la mirada a uno de los elementos que intervienen en las actividades mediadas: en la experimentación del primer año hacia la meta, que es la generación de un PIM a partir de unas tareas de resolución de problemas; en la del segundo año hacia los sujetos, que en ese caso son los estudiantes; en la del tercer año hacia el profesor, que es el propio sujeto investigador. Además, en cada caso, hay un tipo de mediación protagonista del estudio: en la primera investigación las pragmáticas, en la segunda las epistémicas y en la tercera las heurísticas. Se presentan, a continuación los principales rasgos de cada una de las experimentaciones.

4.5.1. La Experimentación 1

La experimentación del primer curso se plantea con un contenido claro: la transformación de una tarea de resolución de problemas (R.P.) (ver el Capítulo 2 de tareas matemáticas) o un *pequeño problema* matemático (Braverman, 2006 y Braverman y Samovol, 2008) en un *serio trabajo de investigación* o, según la acepción utilizada en esta investigación, la transformación en un proyecto de investigación matemática (P.I.M.). El objetivo de la experimentación, desde el punto de vista de la investigación, es la caracterización de ese proceso de transformación en dos aspectos clave del mismo: las fases que vertebran su estructura y los procesos cognitivos que el estudiante pone en práctica en el desarrollo del mismo.

Las actividades del estudiante constituyen un proceso complejo en el que se parte de la resolución de una tarea de R.P. para llegar a la obtención de un P.I.M. mediante el planteamiento del correspondiente problema de investigación. Este proceso se da por terminado cuando el estudiante hace explícito el problema de investigación, obtenido por *extensión* de la tarea de R.P.

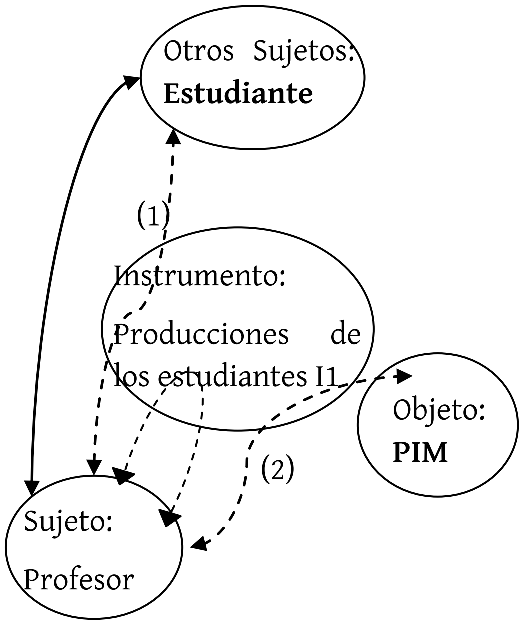


Figura 4.8. Mediaciones en la Experimentación 1. Caso 1 de las actividades mediadas

Para llevar a cabo este análisis por parte del profesor, el instrumento empleado (artefacto + esquema) es el recurso documental que recoge la producción del estudiante. A través de la actividad mediada, y más concretamente, con las mediaciones de tipo *epistémico*, el profesor puede identificar los conocimientos en acción o invariantes operacionales de los esquemas del estudiante, que éste pone en práctica en el proceso.

En la Figura 4.8 se pueden ver las líneas de mediación que tienen un papel prioritario en este caso:

1. En primer lugar, entre el profesor y el estudiante, línea (1). El análisis va a permitir identificar, a través de mediaciones de tipo epistémico, los invariantes operacionales de los esquemas del estudiante; es decir, se harán explícitos los *conocimientos en acción,* implícitos en la componente psicológica del instrumento documental.
2. En segundo lugar la línea de mediación (2), entre el profesor y la meta, va a permitir al profesor, a través de mediaciones de tipo pragmático, caracterizar el proceso que va desde la tarea inicial hasta la consecución del objeto de la actividad: la obtención del problema o problemas de investigación para el PIM. Esta caracterización dará luz sobre dos aspectos: por un lado diferenciará las fases del proceso y, por otro, hará explícitos los principales procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes en el transcurso del proceso.

La experimentación se llevó a cabo con 5 estudiantes de bachillerato, durante un trimestre del curso académico. El profesor propone a cada uno una tarea de resolución de problemas, para ser resuelta y ampliada paulatinamente por el estudiante. Este último debe entregar sucesivos borradores cada tres semanas. Los borradores recogen el trabajo acumulado, llevado a cabo por el estudiante hasta ese momento, sobre los caminos y orientaciones dadas al trabajo, junto con los resultados alcanzados hasta ese momento. El profesor lee y analiza cada uno de los borradores entregados y añade comentarios en el margen del documento, devolviéndolo al estudiante al final de la semana siguiente. Estas ideas y propuestas del profesor debían ser tenidas en cuenta por el estudiante, que debía incorporarlas al mismo, desarrollando las sugerencias de trabajo hechas. En total, el estudiante hacía tres entregas: dos borradores y el documento definitivo del trabajo al final del tercer mes.

En esta primera experimentación, el PIM elaborado por una de las estudiantes, la de las tablas numéricas con progresiones aritméticas, trata varios problemas, por lo que se utilizará en el Capítulos 5 (la generación de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas) y en el Capítulo 6 (en la parte de los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la prueba). Así mismo, este PIM sirvió como punto de partida para las experimentaciones de los dos años siguientes (pues tratan problemas relacionados con el mismo tema: las tablas numéricas con progresiones aritméticas); de ahí que los resultados de la estudiante de la experimentación del primer año tengan mucho interés.

Los otros cuatro casos finalizaron con la experimentación. La temática de los trabajos figura en el capítulo 5 de la investigación, en el estudio pormenorizado que se hace de cada uno.

Desde el punto de vista del trabajo del profesor, los resultados esperados, que pretenden conseguirse con la experimentación 1, se presentan en la Tabla 4.9.

MEDIACIONES	RESULTADOS PARA EL PROFESOR
HACIA EL ESTUDIANTE (EPISTÉMICAS)	-Hacer explícitos los invariantes operacionales (implícitos) de sus esquemas. - Conocer los procesos cognitivos que pone en práctica
HACIA LA META (PRAGMÁTICAS)	- Profundizar en la naturaleza de la meta - Conocer la estructura (fases) del proceso para su consecución - Describir las acciones que conlleva cada fase. - Dotar de dinamismo al proceso mediante el uso de estrategias eficaces

Tabla 4.9. Experimentación 1. Resultados esperados del trabajo del profesor

Como puede observarse en la figura 4.8, la mediación de tipo epistémico (dirigida al estudiante) permite al profesor detectar qué tipo de *conocimientos en acción* tiene el estudiante, lo que constituye una cuestión clave para, posteriormente, mediante la mediación pragmática (dirigida hacia la meta) poder caracterizar el proceso: las fases y los procesos cognitivos puestos en práctica por el estudiante, que son la meta de la experimentación.

En cuanto a los estudiantes, aunque en el estudio de cada caso (dentro del capítulo 5) queda suficientemente claro su papel, se podría resaltar que los conocimientos que debe poner en práctica son, sobre todo, de tipo procedimental: estrategias de resolución de problemas, autoplanteamiento de preguntas, establecer conexiones entre contextos, levantamiento de casos particulares, detección de patrones, su extensión y generalización, etc.

4.5.2. La Experimentación 2

La experimentación 2 surge a partir del trabajo desarrollado por una alumna en la experimentación 1. Por tanto, el punto de partida es el documento final que ella elaboró, en el que describe el proceso y resultados de la extensión de una tarea de R.P. a un PIM. Este documento era el resultado de dos borradores anteriores, que habían sido analizados por el profesor y devueltos a la estudiante.

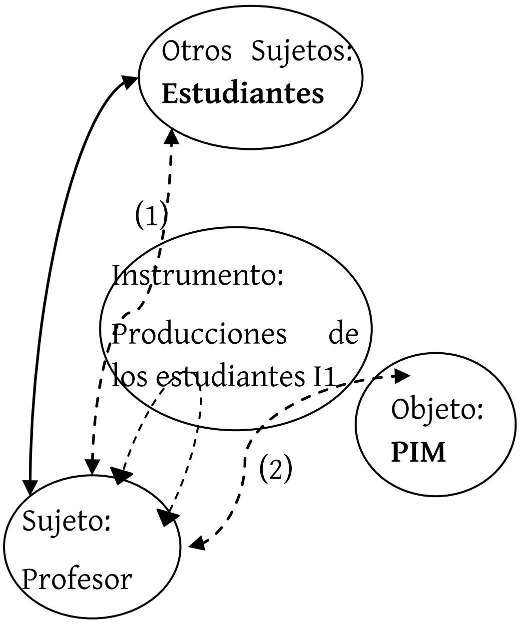


Figura 4.10. Mediaciones en la Experimentación 2. Caso 1 de las actividades mediadas

Esta experimentación se llevó a cabo con 5 estudiantes de Bachillerato a los que el profesor planteó la continuación del trabajo desarrollado por la estudiante de la experimentación 1. Se trataba de resolver algunos de los problemas de investigación planteados y no resueltos por la estudiante de la experimentación anterior (la temática de este trabajo figura en el capítulo 6 de esta tesis). Para ello, todos los estudiantes debían leer el documento de punto de partida, elaborado por la estudiante de la experimentación anterior, como condición previa para poder participar en la experiencia (la lectura se produjo en un plazo de una semana).

La experimentación 2 se plantea como un trabajo en grupo con la siguiente metodología:

1. Los estudiantes trabajan, en una primera fase, de manera individual en aquellos aspectos del PIM que les interesen, durante 3 semanas.

2. Al cabo de esas tres semanas, cada uno entrega al profesor un borrador con el trabajo realizado.

3. Durante la cuarta semana, el profesor devuelve los borradores comentados (como en la experimentación 1) y se lleva a cabo una reunión conjunta, para poner en común los avances conseguidos, discutir las ideas de los demás y tomar acuerdos sobre los caminos a explorar cada uno. A partir de este momento, los estudiantes que trabajen sobre el mismo problema pueden reunirse para trabajar conjuntamente (en pequeño grupo), de manera autónoma, de forma que los siguientes borradores entregados por ellos son de elaboración conjunta, en pequeño grupo, no son individuales.

4. Este proceso se vuelve a repetir otras dos veces (ocho semanas)

5. Al finalizar el cuarto periodo de trabajo (tres semanas) no hay entrega de borradores, sino que, tras la reunión conjunta, se da un plazo de tres semanas para la elaboración conjunta del documento final. Posteriormente los estudiantes entregan el documento definitivo dándose por terminado la experimentación.

En esta experimentación, el contexto para llevar a cabo el proceso de análisis de las producciones de los estudiantes es similar al de la experimentación 1, con las siguientes diferencias:

1. El eje principal de la actividad mediada va a ser profesor→producciones →estudiantes (línea (1) de la figura 4.10). Por tanto se focaliza la atención en los otros sujetos, mientras que en la experimentación 1, el elemento central era el objeto, la meta.

2. La mediaciones que se priorizan en el análisis van a ser de tipo epistémico, ya que se quiere averiguar el tipo de conocimientos que ponen en práctica los estudiantes, a la hora de resolver los problemas de investigación.

3. El instrumento para el análisis está compuesto por el documento final del trabajo en grupo y también por los sucesivos borradores elaborados individualmente o en pequeño grupo.

Desde el punto de vista del trabajo del profesor, los resultados esperados en la experimentación 2, son los que aparecen en la Tabla 4.11.

Como puede observarse en la figura 4.10, en esta experimentación se focaliza la atención en las mediaciones de tipo epistémico, con el objeto de profundizar en el conocimiento de los otros sujetos, sus ideas, razonamientos, esquemas, procesos que utiliza, etc.

MEDIACIONES	RESULTADOS PARA EL PROFESOR
HACIA LOS ESTUDIANTES (EPISTÉMICAS)	- Valorar si un PIM puede continuarse, dando lugar a otros, generándose así una teoría matemática, con sus definiciones, propiedades, teoremas, etc. - Explicitar los invariantes operacionales (conocimientos en acción) de los esquemas (componente psicológica del instrumento) contenidos en el instrumento (producciones de los estudiantes). - Conocer los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes en el desarrollo del PIM.

Tabla 4.11. Experimentación 2. Resultados esperados del trabajo del profesor

En cuanto a los estudiantes, hay varios de sus procesos cognitivos en los que hay que focalizar la atención en esta experimentación: a) los ejemplos (genéricos, contraejemplos, etc.) como pilares básicos para la construcción y justificación de conjeturas, o para la estructuración de pruebas y demostraciones; b) la analogía como proceso fundamental para la generalización de todo tipo de ideas matemáticas: conceptos, propiedades, resultados, etc.

4.5.3. La Experimentación 3

La tercera experimentación, realizada en un tercer curso académico, es también una continuación de la experimentación 1, centrando la atención en la resolución de uno de los problemas de investigación planteados en el documento elaborado por la estudiante de la experimentación 1.

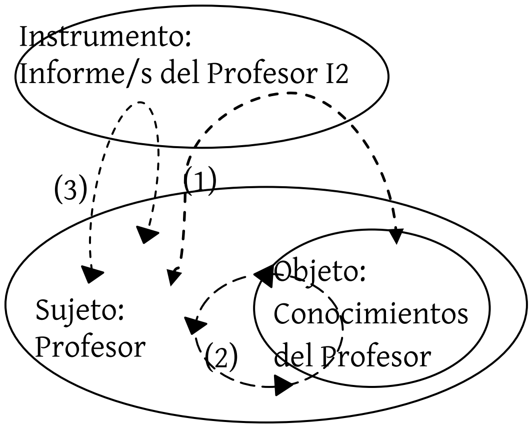


Figura 4.12. Mediaciones en la Experimentación 3. Caso 2 de las actividades mediadas

En el marco de las actividades mediadas por un instrumento, la experimentación 3 se corresponde con el Caso 2 presentado en este mismo capítulo (apartado 4.1.2). En este caso (véase la figura 4.12) el sujeto y el objeto casi coinciden; o mejor dicho, el objeto, que son los conocimientos (de contenido y didácticos de contenido) del profesor, es parte del sujeto (el profesor mismo) y todas las líneas de mediación comienzan y acaban en este último.

Además, teniendo en cuenta el objeto o meta de esta experimentación, el tipo de mediaciones prioritarias son las heurísticas, ya que se va a analizar la posibilidad de que se produzcan modificaciones en los conocimientos del profesor, en el desarrollo de un PIM por estudiantes.

En esta experimentación participaron dos estudiantes de ESO, concretamente de 4º curso de ESO y se llevó a cabo durante seis meses del curso académico (22 semanas aproximadamente). El profesor propone a los estudiantes la realización de un PIM en grupo con la siguiente metodología:

1. Los estudiantes comienzan resolviendo la tarea de R.P. propuesta a la estudiante de la experimentación 1, con el objetivo de que cuando se enfrenten al problema de investigación del PIM que van a desarrollar, estén familiarizados con el contexto del problema, conozcan sus antecedentes, terminología, etc. Esta fase dura dos semanas)

2. Una vez resuelta la tarea inicial de R.P., el profesor plantea el problema de investigación a los estudiantes. Éstos trabajan en paralelo, generando sus propios borradores individuales, enviándolos (por correo electrónico) al profesor y a su compañero (para que todos sepan el estado del proceso). Cada tres semanas (aproximadamente) se produce el envío de los borradores.

3. Durante la cuarta semana, el profesor devuelve los borradores comentados (como en la experimentación 1) y cada estudiante hace algún comentario, si es el caso, sobre el borrador del compañero (con el objeto de aportarle ideas o sugerirle caminos).

4. Este proceso se vuelve a repetir otras tres veces (en total 16 semanas).
5. Posteriormente, a lo largo de otras cuatro semanas, los estudiantes se reúnen para la elaboración del documento o informe de resultados. Posteriormente los estudiantes entregan el documento definitivo dándose por terminado la experimentación.

Desde el punto de vista del trabajo del profesor, los resultados esperados en la experimentación 3, son los de la Tabla 4.13.

Como se puede observar en la Tabla 4.13, los resultados que se esperan con la experimentación 3 se refieren a la constatación de que se pueden producir cambios en el marco de conocimientos del profesor (de contenido y didácticos del contenido); la detección de conflictos cognitivos entre los conocimientos y/o creencias del profesor con otros conocimientos que se le presentan; y la catalogación de los tipos de cambios: reforzamiento, reacomodación, modificación o sustitución.

MEDIACIONES	RESULTADOS PARA EL PROFESOR
HACIA EL PROFESOR (HEURÍSTICAS)	- Constatar que los conocimientos del profesor pueden cambiar en el transcurso de la realización, por los estudiantes, de un PIM. - Detectar conflictos cognitivos, teniendo en cuenta las creencias del profesor, entre sus conocimientos y los que se generan o aparecen en lo PIM -Proponer la consolidación, modificación o sustitución de alguna idea del marco de conocimientos (de contenido y didácticos de contenido) del profesor, de alguna de las formas siguientes: a) Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces porque explican adecuadamente las situaciones. b) Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.) c) Modificación y/o sustitución de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos d) Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos e) Consolidación o modificación de las creencias del profesor.

Tabla 4.13. Experimentación 3. Resultados esperados del trabajo del profesor

En cuanto a los estudiantes, hay que resaltar que los cambios en los conocimientos del profesor tienen su origen en algún aspecto que surge de las actividades llevadas a cabo por los estudiantes en el desarrollo del PIM, por lo que podemos concluir que los cambios del profesor están motivados por las acciones de los estudiantes.

CAPÍTULO 5. EL PROCESO DE GENERACIÓN DE UN P.I.M. A PARTIR DE UNA TAREA DE R.P. ESTRUCTURA Y FASES

5.0. PRESENTACIÓN

En este capítulo se responderá a la pregunta 1.1 del problema de investigación, que versa sobre la generación de un PIM a partir de una tarea de Resolución de Problemas (R.P.)

La transformación de una tarea de resolución de problemas (R.P.) (ver el Capítulo 2 de tareas matemáticas) o un *pequeño problema* matemático (Braverman, 2006) en un *serio trabajo de investigación (*Braverman & Samovol, 2008) o, según la acepción utilizada en esta investigación, la transformación en un proyecto de investigación matemática (P.I.M.). Éste es un proceso complejo en el que el estudiante parte de la resolución de una tarea de R.P. para llegar al desarrollo de un P.I.M. mediante el planteamiento del correspondiente problema de investigación. Este proceso se da por terminado cuando el estudiante hace explícito el problema de investigación, obtenido por *extensión* de la tarea de R.P.

Como se había explicado en el capítulo 4, para llevar a cabo este análisis por parte del profesor, el instrumento empleado (artefacto + esquema) es el recurso documental que recoge la producción del estudiante. A través de la actividad mediada, y más concretamente, con las mediaciones de tipo epistémico, el profesor puede identificar los conocimientos en acción o invariantes operacionales de los esquemas del estudiante, que éste pone en práctica en el proceso.

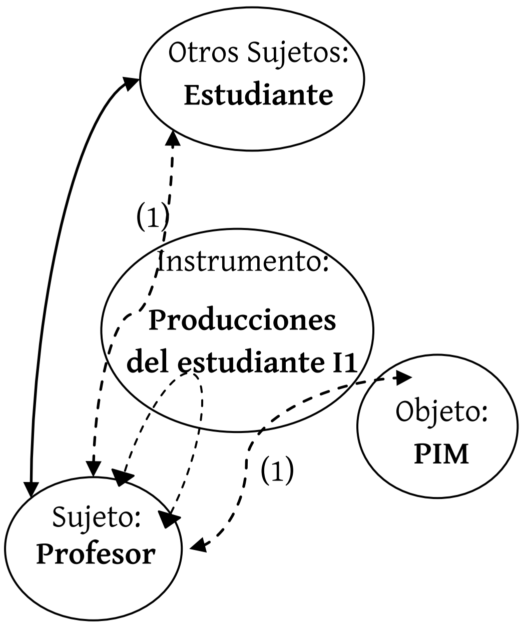


Fig. 5.1. Actividad mediada por un instrumento. Caso 1

En la Fig. 5.1. se pueden ver las líneas de mediación que tienen un papel prioritario en este caso. En primer lugar, entre el profesor y el estudiante, línea (1), que va a permitir identificar, a través de la mediación de tipo epistémico, los invariantes operacionales de los esquemas del estudiante; y en segundo lugar la línea (2) que permite al profesor, a través de la mediación de tipo pragmático, caracterizar el camino que va desde la tarea inicial hasta la consecución del objeto de la actividad: el PIM.

Para identificar los invariantes operacionales de los esquemas de los estudiantes, se hará un estudio en el que se presentarán varios casos concretos a modo de estudio de casos. Los criterios para su selección han sido: a) la variedad de los contenidos matemáticos trabajados; b) la variedad en las formas de expresión utilizadas por los estudiantes (no se quería que todos los trabajos tuvieran uniformidad en la forma de expresarse los estudiantes); c) el nivel de consecución de los resultados por parte del estudiante (son trabajos en los que el nivel de consecución de los objetivos es bastante satisfactorio). En la Tabla 5.2. se resumen sus principales características.

TÍTULO DEL TRABAJO	DOCUMENTO
FACTORES DE CORRECCIÓN DE NOTAS	FC-SG ANEXO 5
TERNAS PITAGÓRICAS	TP-YK ANEXO 1
PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS	PH-BY ANEXO 2
CANALETA PARA EL AGUA	MC-JS ANEXO 3
PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN EL ESPACIO	TN-PI ANEXO 4

Tabla 5.2. Tabla resumen de los casos estudiados en el proceso de obtención de un P.I.M. a partir de una tarea de R.P.

Todos los casos fueron desarrollados por estudiantes de 2º curso de Bachillerato, durante un trimestre del curso académico, mediante la entrega de sucesivos borradores cada tres semanas. Todos los estudiantes cursaban matemáticas de la Opción de Ciencias y Tecnología, itinerario de Ingenierías. El profesor se leía cada uno de los borradores entregados y añadía comentarios en el margen del documento, devolviéndolo al estudiante al final de la semana siguiente. Estas ideas debían ser tenidas en cuenta por el estudiante, que debía incorporarlas al mismo, desarrollando las sugerencias de trabajo hechas por el profesor. En total, el estudiante hacía tres entregas: dos borradores y el documento definitivo del trabajo al final del tercer mes (para más información puede consultarse el capítulo 4, contexto de la investigación, apartado 4.3.1, correspondiente a la experimentación 1).

En el presente capítulo se analizarán las características del proceso de transformación de un problema en un proyecto de investigación en los casos presentados anteriormente. Para ello, se explicitarán las situaciones que aparecen, con el fin de identificar los niveles de organización que los instrumentos producen en las situaciones. A partir de ello, comparando los distintos trabajos, se buscarán:

1. Los invariantes operacionales de los esquemas de los estudiantes (mediante el estudio de los 4 primeros casos).
2. La estructura y las fases del proceso (mediante el análisis del quinto caso presentado)

Posteriormente, combinando los dos aspectos anteriores, se describirá la estructura del proceso, sus fases y los procesos cognitivos de los estudiantes en el proceso.

5.1. EL CASO DE LOS “FACTORES DE CORRECCIÓN”

Veamos un primer caso, en el que se parte de una tarea de resolución de un problema concreto y se desea obtener un PIM. Para llevar a cabo el análisis, utilizaremos el documento FC-SG, que contiene el trabajo final de S.G., una estudiante de Bachillerato, sobre factores de corrección para la modificación de las notas de un examen. El problema de partida está tomado de Arcavi (2005, p.44) y aparece inicialmente de la siguiente manera:

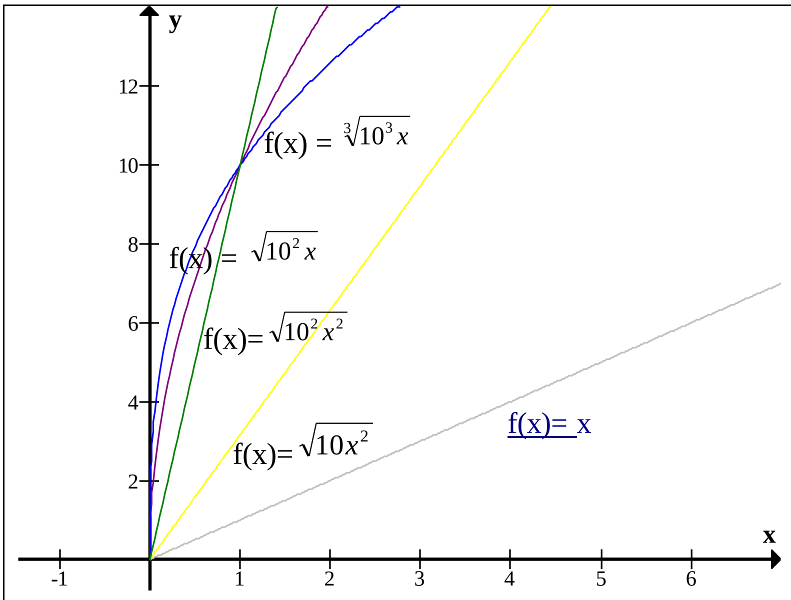
> *Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era x, en una escala de 0 a 100, pasaría a ser $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue $x = 81$, la corregida sería $y = 90$.*

A partir del enunciado, se le pide a la estudiante que proponga algunos factores de corrección que conozca, en el contexto del sistema educativo español, estudie el factor propuesto por la profesora en el problema de partida y analice si podría haber utilizado otros que tengan efectos similares.

En el Índice del documento FC-SG (Anexo 5, p. 319), la estudiante expone los distintos apartados del trabajo, y en él se puede observar el enfoque que le da y el desarrollo del mismo:

Como se puede observar, la estudiante plantea procesos de modelización matemática reiterados: en primer lugar plantea la utilización de modelos lineales (punto 2.1. del índice) como posible alternativa al modelo utilizado por la maestra israelí; pero como ella misma concluye en el documento FC-SG (Anexo 5, p. 320-321):

> *Partimos de la expresión algebraica de la función:* $y = mx \pm c$. *Si analizamos el caso m=1 del ejemplo, suponiendo que la nota varia una cantidad* $c = 0{,}5$ *, obtenemos la siguiente gráfica:*



Analizando los resultados obtenidos, observamos que este método no es tan efectivo como primeramente se pensaba, ya que la calificación máxima y mínima se salen de sus límites, cosa que no parece lógico en un principio.

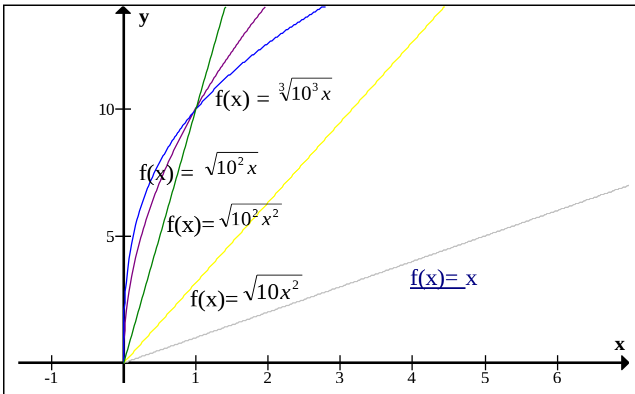
Es decir, que aplicando modelos de la forma $y = mx \pm c$, algunas notas que se obtienen se salen del intervalo $[0,10]$ y no son aceptables.

Esto mismo ocurre al intentar aplicar factores de corrección que modifican la nota un porcentaje, como los que muestra en el documento FC-SG (Anexo 5, p. 321):

Para solucionar el problema anterior, probaremos variando la nota un porcentaje. En un principio, parece una solución más adecuada ya que no se subiría a todas las notas la misma cantidad, sino que dependiendo de la calificación la nota definitiva variará más o menos. Además la calificación mínima la deja como está. Este tipo de funciones viene dado por la expresión: $y = mx$.

Si ponemos un ejemplo, el factor será: $y = x + \frac{p.x}{100} = \frac{100x+p.x}{100} = x\frac{100+p}{100} = x\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Siendo p el porcentaje que variaremos la nota (por ejemplo p=20) la gráfica será:

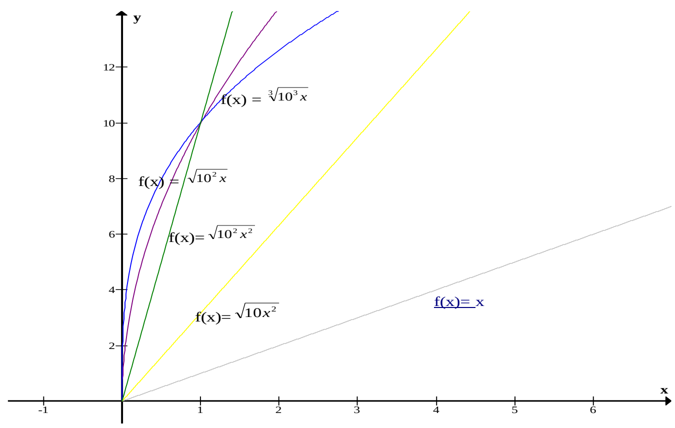


Gráficamente observamos que las notas más altas se ven más afectadas, son las que más aumentan al sumar p y también las que más disminuyen al restarlo. Además, vuelven a surgir problemas con las notas altas ya que sobrepasan los límites establecidos. Por tanto, no tendría sentido desde un punto de vista formal ya que la función debería obtener unos valores entre 0 y 10.

Después de esto, la estudiante plantea modelos de redondeo (punto 2.2. del índice del documento) como aparece en FC-SG (Anexo 5, p. 322) :

[...] En estos casos ninguna nota se sale del límite estipulado. Sin embargo, en este caso subimos lo mismo a un 4,1 que a un 4,9, lo cual no parece lógico. Para buscar otras alternativas analizaremos la función parte entera: $y = E[x]$. *En esta función podemos hacer algunos cambios, por ejemplo podemos sumar una cantidad fija:* $y = E[x] \pm 1$. *Pero, de este modo se repiten problemas como que la variación de notas puede ser ilógica o que en algunos casos las notas finales no tienen sentido. Por tanto volvemos al principio del problema. Y puesto que estos factores no son viables, investigaremos otros nuevos.*

En todos los casos anteriores, la estudiante hace uso de la *particularización o especialización* (Dreyfus 2008, pág. 5), planteándose posibles factores de corrección que le permitan descubrir las peculiaridades del problema inicial. También utiliza la *contextualización* (Arcavi 2002, p. 13), para plantearse nuevos contextos funcionales donde tenga sentido la búsqueda de una solución al problema.



A partir de aquí, vuelve al modelo radical utilizado por la profesora israelí y, después de hacer su representación gráfica y analizar su crecimiento, se plantea buscar otros *similares*. Para ello nos dice (Anexo 5, p. 324) en el documento FC-SG: *A continuación, variaremos diversos elementos del factor radical para obtener otros factores similares. Estos elementos son: el índice de la raíz o los exponentes. Como la función debe tomar valores entre 0 y 10, las siguientes funciones no nos sirven:*

Vemos por tanto, que los exponentes y los índices deben variar según una relación y no aleatoriamente como previamente hemos hecho. Los exponentes deben ser una unidad menor que el índice de la raíz. Además no pueden acompañar simultáneamente exponentes al coeficiente y a la incógnita. Según esto tenemos dos tipos de funciones: $F_n(x)=\sqrt[n]{10x^{n-1}}$ *y* $G_n(x)=\sqrt[n]{10^{n-1}x}$.

Debemos tener en mente que: $x\in[0,10]$, *ya que, en caso contrario, las funciones no tienen sentido. En general, para las notas comprendidas entre 0 y N; es decir,* $x\in[0,N]$ *tendríamos:* $F_n(x)=\sqrt[n]{Nx^{n-1}}$ *;* $G_n(x)=\sqrt[n]{N^{n-1}x}$.

Como vemos, S.G. identifica la estructura del problema inicial cuando dice: *variaremos diversos elementos del factor radical para obtener otros factores similares. Estos elementos son: el índice de la raíz o los exponentes.* Entonces, la estudiante propone algunos factores que no sirven (son los que aparecen representados gráficamente) y, finalmente, presenta dos familias infinitas de factores de corrección, que generalizan el utilizado por la profesora israelí y se atienen a las condiciones del problema inicial.

En adelante, se denominará *estructura del problema inicial* al conjunto de aspectos fijos que conforman el enunciado concreto del problema inicial: números, figuras, condiciones, datos, relaciones, etc. Estas *cualidades* o *variables* constituyen lo que podríamos denominar *esqueleto del problema*, que se encuentra oculto en el interior del enunciado. Si dejamos que esas variables tomen valores diferentes a los del problema inicial, obtenemos problemas más generales que pueden constituir verdaderos problemas de investigación, para desarrollar en P.I.M. futuros. (De la Fuente, 2010A, 2010B, 2011A, 2011B). En el problema de partida de los factores de corrección son: el índice de la raíz, los exponentes del radicando y el contexto de notas entre 0 y 100 del ámbito israelí.

Este resultado parcial del trabajo, el descubrimiento de las familias de funciones F_n y G_n podría ser, en sí mismo, un buen punto de partida para un PIM sobre estos modelos funcionales como factores de corrección, teniendo como problema de investigación el estudio de las familias F_n y G_n, con $n>2, n\epsilon N$. Y así lo considera la estudiante, que presenta varios resultados en las pág. 9-12 del documento FC-SG-09 y se plantea una serie de preguntas sobre el tema de trabajo, para ser resueltas con los factores de corrección radicales (FC-SG, Anexo 5, p. 324):

Analizando la gráfica, observamos que $y=\sqrt{10x}$ *es la función que separa las funciones* $F_n(x)$ *y* $G_n(x)$ […] *ambas funciones coinciden cuando n toma el valor 2:* $F_2(x)=G_2(x)=\sqrt{10x}$.

[…] *las funciones de la forma* $G_n(x)=\sqrt[n]{10^{n-1}x}$ *se encuentran por encima de la* $F_2(x)=G_2(x)$. *Además cuanto mayor sea el índice de la raíz, más alejada estará la función de* $y=\sqrt{10x}$. *Por tanto, podemos decir que las funciones de la forma* $G_n(x)$ *suben más las notas que la función* $y=\sqrt{10x}$, *y efectivamente más que las funciones de la forma* $F_n(x)$.

[…] $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x$*, luego, las funciones* $F_n(x)$ *se acercan a* $f(x) = x$*. Sin embargo, en el caso de* $G_n(x)$ *debemos tener en cuenta que la función ha de pasar por el origen. Según esto,* $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$ *siendo* $G(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ N & si\ x \in (0,N] \end{cases}$

Después de haber estudiado las características de las funciones: $F_n(x)$ *y* $G_n(x)$*, nos surgen nuevos interrogantes:* ***a)*** *¿Qué expresión tendrá el valor x, para que la imagen de éste sea* $\frac{N}{2}$*?*

b) *¿Qué índice de la raíz, n, debemos tomar, para asegurarnos de que una nota x se transforma en* $\frac{N}{2}$*?* ***c)****¿Qué n permite que una función nos convierta un valor* a *prefijado en el doble, es decir, en* $2a$*?*

Los interrogantes anteriores se contestan posteriormente y forman parte de las características de las funciones F_n y G_n como factores de corrección. Además, en el proceso de búsqueda de estas respuestas, la estudiante obtiene una nueva generalización de los factores F_n y G_n; esto aparece en FC-SG (Anexo 5, p. 326):

Anteriormente hemos definidos los tipos de funciones del modelo radical como: $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$ *y* $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$*. Estos dos tipos de funciones son un caso específico de la expresión que engloba a todos los factores:* $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m x^{n-m}}$

Como podemos ver, S.G. encuentra *conexiones entre los contextos* de las familias de funciones F_n y G_n y consigue una nueva *abstracción* a partir de ellos, generando una nueva familia de factores de corrección que engloba a las anteriores. Es decir, que el contexto en el que se presentaba el problema de investigación es reformulado de nuevo por la estudiante, a otro contexto más general, en un momento del desarrollo de la investigación.

Teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, se presentan, a continuación, en tres tablas, los *dominios de situaciones, familias y clases* para el caso de los factores de corrección, junto con los *invariantes operacionales* que forman parte del *esquema de conocimientos* que pone en práctica la estudiante en este *dominio.*

En la primera de ellas, la Tabla 5.1, se recoge el *Dominio* 1 *de situaciones*, en el que la estudiante presenta una primera batería de *familias* de modelos funcionales, $F_{1,1}$; $F_{1,2}$; $F_{1,3}$, con sus respectivas *clases de situaciones* $C_{1,1,1}$; $C_{1,1,2}$; ... $C_{1,3,2}$. Este *dominio* está compuesto por los factores de corrección que resultan conocidos a la estudiante. Para resaltar las conexiones entre las *clases de situaciones* que componen una misma *familia*, se han separado aquellas por líneas de puntos.

FACTORES DE CORRECCIÓN (I)

DOMINIO	FAMILIAS DE ACTIVIDAD	CLASES DE SITUACIONES	INVARIANTES OPERACIONALES
D_1 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL. OTROS FACTORES DE CORRECCIÓN.	$F_{1,1}$ Func. $y = mx \pm c$	$C_{1,1,1}$ $y = x + 1/2$	- Contextualización. Uso de modelos funcionales conocidos para la estudiante: a) modificar en una cantidad fija; b) modificar en un porcentaje; c) redondear. - Particularización o especialización. Ejemplos genéricos. Abstracción en contextos. - Estudio de analogías y diferencias. - Ajuste y validaciónde los modelos a las condiciones y al contexto de la situación de partida.
		$C_{1,1,2}$ $y = x - 1/2$	
	$F_{1,2}$ Func. $y = x(1 \pm \frac{p}{100})$	$C_{1,2,1}$ $y = x\left(1 + \frac{1}{5}\right)$	
		$C_{1,2,2}$ $y = x\left(1 - \frac{1}{5}\right)$	
	$F_{1,3}$ Func. $y = E[x] \pm c$	$C_{1,3,1}$ $y = E[x] + 1$	
		$C_{1,3,2}$ $y = E[x] - 1$	

Tabla 5.1: Dominio 1. Factores de corrección

En la Tabla 5.2 se presenta el *Dominio 2 de situaciones*, que se ha denominado *vuelta al problema inicial.* En él, hay una *familia de actividad* $F_{2,1}$ que está constituida por los nuevos modelos funcionales que resultan de las variantes introducidas en el modelo dado en la situación inicial. En esta *familia* se observan 7 clases de situaciones, siendo las dos últimas las que contienen a los primeros factores de corrección generales, F_n y G_n.

FACTORES DE CORRECCIÓN (II)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_2 VUELTA AL PROBLEMA INICIAL	$F_{2,1}$ Variantes en los datos iniciales. Nuevos modelos	$C_{2,1,1}$ $x \epsilon [0, 10]$ $y = \sqrt[3]{10^3 x}$	- Revisión del enunciado inicial y búsqueda de nuevos contextos: a) Identificación de variables o cualidades del problema b) Variación libre de variables o cualidades (aspectos fijos del problema inicial): *giros de botón, estrategia WIN* c) Obtención de nuevos contextos -Particularización o especialización. Ejemplos genéricos. - Generalizaciones: índice n y nota máxima N. Abstracción en contextos - Análisis de la validez de los factores nuevos con las condiciones iniciales y el contexto del problema
		$C_{2,1,2}$ $x \epsilon [0, 10]$ $y = \sqrt{10^2 x}$	
		$C_{2,1,3}$ $x \epsilon [0, 10]$ $y = \sqrt{10^2 x^2}$	
		$C_{2,1,4}$ $x \epsilon [0, 10]$ $y = \sqrt{10 x^2}$	
		$C_{2,1,5}$ $x \epsilon [0, 10]$ $F_n(x) = \sqrt[n]{10 x^{n-1}}$	
		$C_{2,1,6}$ $x \epsilon [0, 10]$ $G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1} x}$	
		$C_{2,1,7}$ $x \epsilon [0, N]$ $F_n(x) = \sqrt[n]{N x^{n-1}}$	
		$C_{2,1,8}$ $x \epsilon [0, N]$	

		$G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$	

Tabla 5.2: Dominio 2. Factores de corrección

Por último, la Tabla 5.3 presenta el tercer *dominio*, D_3, en el que se estudian en profundidad los factores F_n y G_n, hasta llegar a la última generalización de éstos. Este *dominio* está compuesto por 3 *familias* de actividades, $F_{3,1}$; $F_{3,2}$ y $F_{3,3}$, cada una de ellas con sus respectivas *clases de situaciones.*

FACTORES DE CORRECCIÓN (III)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_3 EL PROBLEMA GENERAL. ESTUDIO DE LOS FACTORES F_n, G_n	$F_{3,1}$ Algunas propiedades	$C_{3,1,1}$ $F_2(x) = G_2(x)$	- Estudio de propiedades específicas de las familias F_n y G_n, mediante: a) Identificación de casos particulares especiales b) Planteamiento y resolución de nuevos problemas c) Estudio de las analogías y diferencias entre las familias de factores. - Conexiones entre los contextos de los factores F_n y G_n. - Abstracción en contextos: Generalización de los exponentes de F_n y G_n. Obtención de los factores H_n^m.
		$C_{3,1,2}$ $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$	
		$C_{3,1,3}$ $\lim_{n\to\infty} G_n(x)$	
	$F_{3,2}$ Algunos problemas. Estudio de casos especiales	$C_{3,2,1}$ Si $x\epsilon[0,N]$, n fijo y $F_n(x) = \frac{N}{2}$, ¿qué valor tiene x?	
		$C_{3,2,2}$ Si $x\epsilon[0,N]$, n fijo y $G_n(x) = \frac{N}{2}$, ¿qué valor tiene x?	
		$C_{3,2,3}$ Si $x\epsilon[0,N]$, x es fijo y $F_n(x) = \frac{N}{2}$, ¿qué valor tiene n?	
		$C_{3,2,4}$ Si $x\epsilon[0,N]$, x es fijo y $G_n(x) = \frac{N}{2}$, ¿qué valor tiene n?	
		$C_{3,2,5}$ Si $a\epsilon[0,N]$ y $F_n(a) = 2a$, ¿qué valor tiene n?	
		$C_{3,2,6}$ Si $a\epsilon[0,N]$ y $G_n(a) = 2a$, ¿qué valor tiene n?	
	$F_{3,3}$ Nueva familia de factores de corrección	$C_{3,3,1}$ $x\epsilon[0,N]$ $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m . x^{n-m}}$	

Tabla 5.3: Dominio 3. Factores de corrección

Volviendo al índice del trabajo, se ve que, una vez estudiados los factores radicales, va repitiendo la misma estructura para otros tipos de modelos funcionales adecuados a la situación inicial: factores logarítmicos y exponenciales (punto 4 del índice) y trigonométricos (punto 5). Sobre estos últimos, se plantea estudiar los modelos para subir notas (punto 5.1), para bajarlas (punto 5.2) y para hacer las dos cosas con el mismo modelo (punto 5.3). El estudio de los modelos trigonométricos es muy amplio y permite afirmar que el proceso desarrollado por la estudiante S.G. constituye el pilar fundamental para el desarrollo futuro de una verdadera *teoría* de modelos funcionales para la corrección de notas.

En cuanto a los invariantes operacionales de los esquemas de la estudiante, recogidos en las Tablas 5.1; 5.2 y 5.3, podemos señalar que en este proceso de generación de problemas de investigación, o de la investigación misma, aparecen:

a) La *abstracción en contextos* (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2001, 2007), en la que la fase de *reconocimiento* (del modelo RBC+C) *puede ocurrir por lo menos de dos maneras, por analogía o por particularización*. Estas dos formas permiten construir generalizaciones a partir del descubrimiento de la estructura subyacente en los *ejemplos genéricos.*

b) La *contextualización* a través de la búsqueda y construcción de *contextos matemáticos* donde situar y resolver el problema inicial y la búsqueda de *conexiones entre contextos* como procesos que facilitan, en el caso concreto estudiado, el hallazgo de sucesivos modelos funcionales que, después del estudio de sus propiedades, limitaciones, etc. pueden servir de solución al problema inicial.

c) Contraste y validación de cada uno de los modelos encontrados con el contexto inicial o situación de partida.

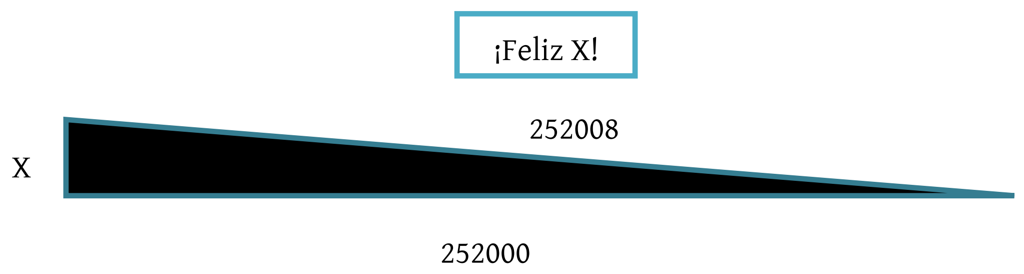
5.2. EL CASO DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS

El siguiente caso sirve también para ilustrar el proceso de transformación de una tarea de R.P. en un P.I.M. En este caso se trata de un trabajo sobre *ternas pitagóricas*, realizado por el estudiante Y.K. Para ello analizaremos el documento TP-YK, que recoge el proceso llevado a cabo.

En primer lugar, al estudiante se le plantea un problema (sobre una felicitación navideña) y se le pide que averigüe si la solución del mismo es una pura casualidad o hay un trasfondo matemático en ella. Así mismo, se le pide que construya otras soluciones para otras posibles tarjetas de este tipo, para ese año o para otros.

El estudiante comienza resolviendo el problema propuesto y lo presenta en un apartado del trabajo titulado *¿Qué son las ternas pitagóricas?* El resultado aparece en el documento TP-YK (Anexo 3, p. 238):

Imagine que recibe la siguiente felicitación de año nuevo:



Para despejar el valor de la incógnita X en este triángulo rectángulo basta con aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$X^2 + 252000^2 = 252008^2$; $X = \sqrt{252008^2 - 252000^2}$; *X = 2008*

Solución: ¡Feliz 2008!

Es realmente sorprendente que unos números tan grandes cumplan este teorema y constituyan una terna pitagórica.

Como se puede ver, el estudiante se sorprende del hecho de que números tan grandes formen una terna pitagórica.

A continuación, Y.K. estudia el concepto de terna pitagórica, las clasifica en primitivas y no primitiva, presenta ejemplos de ternas pitagóricas, demuestra algunas de sus propiedades y presenta dos tipos de modelos matemáticos o expresiones algebraicas para la obtención de ternas pitagóricas (Anexo 1, p. 238-242),:

Forma 1: $2n + 1$, $2n^2 + 2n$ y $2n^2 + 2n + 1$, siendo n un nº natural

Forma 2: $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$, siendo a y b números naturales con a mayor que b.

Hasta aquí, lo que ha hecho el estudiante es situar el problema inicial en un campo matemático de conocimiento; es decir, lo ha *contextualizado* dentro del tema de las ternas pitagóricas. En este sentido, ha revisado las características principales de las ternas pitagóricas, algunas de sus propiedades, y las dos formas más habituales de obtenerlas.

Seguidamente, Y.K. vuelve al problema inicial para ver a cuál de las dos formas puede pertenecer la terna del problema. En el documento TP-YK (Anexo 1, p. 243), podemos leer:

Estudiemos ahora si la terna que resolvimos en la felicitación (2008 , 252000 , 252008) responde a la forma 1 o a la forma 2:

- *Con las expresiones de la forma 1 no se puede obtener, pues eso supondría considerar que uno de los tres números pares de la terna es impar, lo que es imposible.*
- *Sin embargo, con las expresiones de la forma 2 sí que se puede obtener dicha terna pitagórica, pues:*

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 252008 \\ a^2 - b^2 = 252000 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Sumando ambas expresiones, tenemos que:

$$2ab = 2008$$

$$2a^2 = 504008$$

$$a = 502; \quad b = 2$$

Como se puede observar, este sencillo proceso de *modelización* permite a Y.K. situar la solución del problema en un contexto más general: el modelo matemático de la forma 2. Además, la resolución del sistema de ecuaciones anterior le da pistas para *profundizar en el problema inicial*, intentando encontrar otras posibles soluciones para felicitar el año solución, 2008. Esto aparece el documento TP-YK (Anexo 1, p. 243):

Veamos ahora cuáles son todas las posibles formas de felicitar este año, el 2008:

Tenemos que 2ab debe valer 2008, ya que es el menor número de la terna, luego ab = 1004. Al descomponerlo en factores primos resulta que:

$$1004 = 2^2 \, . \, 251 \, . \, 1$$

Por tanto, combinando los diversos factores primos de 1004, obtenemos todas las ternas que contienen a 2008, que son las siguientes:

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 251 \end{cases}$ *LADOS: 63017, 62985, 2008*

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 502 \end{cases}$ *LADOS: 252008, 252000, 2008*

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1004 \end{cases}$ *LADOS: 1008017, 1008015, 2008*

Por tanto, el estudiante ha obtenido todas las posibles soluciones de la *variante del problema inicial* que se obtiene dejando fijo el lado 2008 y dejando variar los otros dos. Seguidamente se plantea el mismo problema para los años 2009 y 2010, en las pág. 244, 245 del Anexo 1, que constituyen otros *casos particulares*, *análogos* al problema inicial (dando otros valores a una de las variables del problema: el año de la felicitación). Para esos casos, encuentra varias soluciones, utilizando la forma 1 y la forma 2 de obtención de ternas pitagóricas.

Después de todo esto, comienza un nuevo apartado de su trabajo, titulado *Origen y demostración de las expresiones de la forma 2 para obtener ternas pitagóricas.* Es aquí donde se plantea el verdadero problema de investigación: el origen y la demostración de las expresiones encontradas para generar ternas pitagóricas. La profundización en el problema le lleva a considerar que el verdadero problema no es encontrar todas las soluciones que puede haber para felicitar cualquier año nuevo, sino que la pregunta clave del proceso es: ¿De dónde vienen las expresiones que nos permiten generar ternas pitagóricas? ¿Cómo surgen? ¿Cuál es el fundamento de esas *formas*? Para contestar a esas preguntas, el estudiante presenta dos demostraciones: una basada en la demostración original de Diofanto, adaptándola a las notaciones y simbología actuales, (Anexo 1, p. 247-248); y la otra utilizando geometría analítica, basada en la ingeniosa idea de que en toda circunferencia centrada en el origen hay puntos de ella con coordenadas racionales

(Anexo 1, p. 248-250). No se presentan las demostraciones porque no aportan nada de interés al análisis realizado

Para terminar el análisis del caso de las ternas pitagóricas, se van a presentar las tablas de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas.

La tabla 5.4 presenta el Dominio 1: Ternas Pitagóricas. Concepto y propiedades. En él aparecen cuatro familias de actividad, F1,1; F1,2; F1,3; F1,4; con sus respectivas clases de situaciones. En cuanto a los invariantes operacionales, en este *dominio* el estudiante utiliza conocimientos explícitos (Teorema de Pitágoras) y después *contextualiza* el problema inicial en el contexto matemático de las ternas pitagóricas; todo ello dirigido a la búsqueda de modelos en los que situar el problema inicial.

En cuanto al Dominio 2: Vuelta al problema inicial, la tabla 5.5. contiene las *familias de actividades*, las *clases de situaciones* y los *invariantes operacionales.* En este *dominio,* el estudiante establece conexiones entre el problema inicial y los modelos matemáticos encontrados en el dominio anterior, estudia variantes del problema obtenidas por modificaciones de los valores de alguna cualidad o variable del problema (el año).

TERNAS PITAGÓRICAS (I)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_1 TERNAS PITAGÓRICAS (T.P.). CONCEPTO Y PROPIEDADES	$F_{1,1}$ Resolución del problema inicial	$C_{1,1,1}$ Teorema de Pitágoras	- Utilización de un contenido matemático (T. de Pitágoras) para la resolución del problema inicial - Contextualización del problema inicial en un campo del conocimiento matemático: a) Concepto de T.P. b) Tipos de T.P. c) Ejemplos de T.P. d) Propiedades de T.P. - Búsqueda de modelos aritméticos generadores de T.P. Obtención de la Forma 1 y la Forma 2.
		$C_{1,1,2}$ Aplicación del Teorema de Pitágoras	
	$F_{1,2}$ Significado de las Ternas Pitagóricas (T.P.)	$C_{1,2,1}$ Concepto de T.P.	
		$C_{1,2,2}$ Tipos de T.P.	
		$C_{1,2,3}$ Ejemplos de T.P.	
	$F_{1,3}$ Propiedades de las T.P.	$C_{1,3,1}$ Si a, b, c son una T.P., entonces no son impares los tres.	
		$C_{1,3,2}$ Casos posibles de paridad en las T.P.	
		$C_{1,3,3}$ Si a, b, c son una T.P., entonces n.a, n.b, n.c son una T.P.	
		$C_{1,3,4}$ Otras propiedades de las T.P	
	$F_{1,4}$ Modelos matemáticos generadores de T.P.	$C_{1,4,1}$ Forma 1: $a=2n+1$; $b=2n^2+2n$; $c=2n^2+2n+1$	
		$C_{1,4,2}$ a, b, c son T.P.	
		$C_{1,4,3}$ Forma 2: $p=a^2-b^2$; $q=2ab$	

		r= a^2+b^2	
		$C_{1,4,4}$ p, q, r son T.P.	

Tabla 5.4: Dominio 1. Ternas Pitagóricas

<table>
<tr><th colspan="4">TERNAS PITAGÓRICAS (II)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="6">D_2
VUELTA AL PROBLEMA INICIAL</td><td rowspan="2">$F_{2,1}$ Conexiones del problema inicial con los modelos aritméticos generadores de T.P.</td><td>$C_{2,1,1}$ Validación de la Forma 1 al problema inicial. Imposibilidad</td><td rowspan="6">- Conexiones entre el contexto del problema inicial y los modelos aritméticos encontrados. Validación de los modelos
- Revisión del enunciado inicial y búsqueda de nuevos contextos:
a) Identificación de variables o cualidades del problema
b) Variación libre de variables o cualidades (aspectos fijos del problema inicial): giros de botón, estrategia WIN
c) Obtención de nuevos contextos
- Particularización o especialización. Ejemplos genéricos.
- Recuento exhaustivo de soluciones.
- Generalización de la variable año. Abstracción en contextos.</td></tr>
<tr><td>$C_{2,1,2}$ Validación de la Forma 2 al problema inicial. Cálculo de a y b</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$F_{2,2}$ Variantes del problema inicial</td><td>$C_{2,2,1}$ Uso de la Forma 2 para la búsqueda de otros valores de a y b para el año 2008</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,2}$ Búsqueda de las soluciones para 2009</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,3}$ Búsqueda de las soluciones para 2010</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,4}$ Búsqueda de todas las soluciones para cualquier año. Método válido para cualquier año.</td></tr>
</table>

Tabla 5.5: Dominio 2. Ternas Pitagóricas

Por último, se presenta la tabla 5.6 cuyo contenido es el Dominio 3: El problema general. Éste constituye el verdadero problema de investigación sobre las ternas pitagóricas (T.P.) y cuyo enunciado podría ser el siguiente: ¿cómo se pueden obtener razonadamente los modelos generadores de T.P? Para resolverlo, el estudiante presenta dos demostraciones diferentes, una de tipo aritmético-algebraico y la otra de geometría analítica, que sirven para obtener la que el estudiante denomina Forma 2 de ternas pitagóricas.

<table>
<tr><th colspan="4">FACTORES DE CORRECCIÓN (III)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="2">D_3
EL PROBLEMA GENERAL</td><td rowspan="2">$F_{3,1}$
Obtención razonada de la Forma 2</td><td>$C_{3,1,1}$ Demostración aritmética (Diofanto)</td><td>- Verbalización del problema general</td></tr>
<tr><td>$C_{3,1,2}$ Demostración con geometría analítica</td><td>- Búsqueda de demostraciones. Campo aritmético-algebraico y campo geométrico-algebraico</td></tr>
</table>

Tabla 5.6 Dominio 3. Ternas Pitagóricas

En cuanto a los invariantes operacionales de los esquemas de la estudiante, recogidos en las Tablas 5.4; 5.5 y 5.6, podemos señalar que en este proceso de generación de problemas de investigación, aparecen:

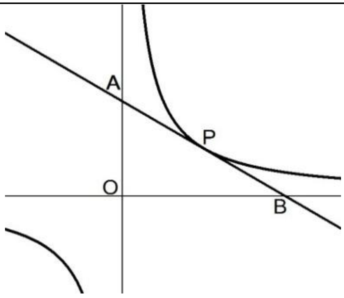
a) La *abstracción en contextos.*

b) La *contextualización* a través de la búsqueda y construcción de *contextos matemáticos* y la búsqueda de *conexiones entre contextos.*

Como puede observarse el proceso presenta muchas similitudes con el llevado a cabo por la estudiante en el caso de los factores de corrección. Al final del estudio de los casos, se sintetizan los invariantes operacionales para caracterizar el proceso.

5.3. EL CASO DE LAS "PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS"

Para el análisis de este ejemplo se utiliza el documento PH-BY. El problema inicial es el siguiente (Anexo 2, p. 254),:



Considere la función $y = \frac{1}{x}$ y sea P un punto de la misma. La recta tangente a la función en el punto P interseca a los ejes de coordenadas en los puntos B (con OX) y A (con OY).

Demostrar que el punto P es el punto medio del segmento AB y que el área del triángulo OAB es 2 u. d. s.

A partir de esta tarea de resolución de problemas (R.P.) se pide a la estudiante B.Y. que analice si esto se cumple con otras hipérbolas.

La estudiante comienza resolviendo el problema inicial poniendo en práctica sus conocimientos de geometría del plano y derivadas y recta tangente (Anexo 2, 253-255), propios del nivel de bachillerato, que cursa B.Y.

Una vez resuelto el problema inicial, la estudiante plantea (Anexo 2, p. 255-256), una posible continuación:

A continuación vamos a generalizar la función, para ver si se conservan estas propiedades. Tomamos la función: $f(x) = \frac{k}{x}$ y vamos a realizar el mismo proceso.

Una vez realizados los cálculos llega a las siguientes conclusiones (Anexo 2, p. 257):

En esta ocasión también el punto P es el punto medio del segmento AB:

$$M_{AB}\left(\frac{0+2a}{2},\frac{{}^{2k}/_{a}+0}{2}\right)\to M_{AB}\left(a,\frac{k}{a}\right)=P(a,b)$$

Si calculamos el área del triángulo que forma la recta tangente con los ejes de coordenadas obtenemos:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

Donde b es la base, que corresponde al segmento OB y h la altura, que corresponde al segmento OA:

$$b=OB=\sqrt{(2a-0)^2+(0-0)^2}=2a$$

$$h=OA=\sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{2k}{a}-0\right)^2}=\frac{2k}{a}$$

El área será: $A=\frac{2a\cdot{}^{2k}/_{a}}{2}=2k$

Podemos observar que el área del triángulo OAB es independiente del punto de tangencia.

Además, la estudiante comienza a plantearse otras preguntas que no estaban en el problema inicial (Anexo 2, p. 258):

El punto P es, a su vez, el vértice de un rectángulo cuya base y altura coinciden respectivamente con sus coordenadas. Es decir, de base a y de altura $\frac{k}{a}$.

Si calculamos su área obtenemos: $A=b\cdot h=a\cdot\frac{k}{a}=k$

Es decir, el área del rectángulo con vértice en P es la mitad que el área del triángulo formado por la tangente a la hipérbola en el punto P y los ejes de coordenadas.

A raíz de esto caben plantearse algunas cuestiones como por ejemplo, qué coordenadas debería tener el punto P para que el triángulo OAB fuera isósceles. Es decir:

$$\frac{2k}{a}=2a\to k=a^2$$

Luego: $a=-\sqrt{k}$ *ó* $a=\sqrt{k}$ *. Como a no puede ser un valor negativo, nos quedamos con la segunda solución.*

El punto buscado es: $P\left(\sqrt{k},\frac{k}{\sqrt{k}}\right)\to P\left(\sqrt{k},\sqrt{k}\right)$

Otra cuestión que se puede plantear es qué coordenadas debería tener P para que la longitud de la hipotenusa del triángulo que se forma sea mínima.

Para resolver esta cuestión, calcula le expresión de la hipotenusa, en función de a y de k, obteniendo

$$h(a)=\frac{2\sqrt{a^4+k^2}}{a}$$

Posteriormente, busca el mínimo de la función (derivando, igualando a cero, etc.) y obtiene que para $a = \sqrt{k}$ es donde se encuentra el mínimo buscado (Anexo 2, p. 258). Se omiten los detalles porque los resultados no aportan nada al análisis planteado.

Una vez resuelta esta cuestión, la estudiante se plantea otra cuestión (Anexo 2, p. 260). En este caso se trata de comprobar que se mantienen las propiedades al trasladar la hipérbola mediante una traslación de vector (p,q):

> *A continuación vamos a comprobar si se siguen conservando estas mismas propiedades al trasladar la hipérbola. Si la trasladamos de tal forma que el origen de coordenadas sea un punto O'(p,q), la nueva expresión de la hipérbola será la siguiente:*
>
> $$f(x) = \frac{k}{x-p} + q$$
>
> *Las ecuaciones de las asíntotas de esta hipérbola son:*
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{qx - pq + k}{x-p} = q$$
>
> $$\lim_{x\to p} \frac{qx - pq + k}{x-p} = \infty$$
>
> *Es decir, $y = q$ es su asíntota horizontal y $x = p$ es su asíntota vertical.*
> *A continuación vamos a comprobar si se cumplen las mismas propiedades que se cumplían en la hipérbola centrada en el origen.*

Hechos los cálculos pertinentes, llega a la comprobación esperada (Anexo 2, p. 263):

> *Observamos que el área del triángulo sigue teniendo el mismo valor a pesar de haber trasladado la hipérbola.*

Una vez concluida la averiguación, se plantea otro problema, generalizando el exponente de la variable independiente, x, (Anexo 2, p. 264):

> *Vamos ahora a tomar la función $f(x) = \frac{k}{x^n}$, una generalización del caso anterior, en la que n es un número entero positivo, y vamos a estudiar si se cumplen las propiedades anteriores.*

Tras diferenciar entre las funciones de esa forma, $f(x) = \frac{k}{x^n}$, en función de la paridad del exponente, ya que tienen gráficas diferentes, averigua si el punto de tangencia $P\left(a, \frac{k}{a^n}\right)$ es el punto medio del segmento generado por la recta tangente al cortar a las asíntotas y llega a la siguiente conclusión (Anexo 2, p. 267):

> *Podemos observar que en este caso, el punto P no es el punto medio de los puntos de corte de la recta tangente a la hipérbola que pasa por P con las asíntotas (en este caso los ejes de coordenadas) como ocurría en las situaciones anteriores.*

Llegada a este punto, vuelve a introducir una nueva variante en la función, para volver a hacer el estudio (Anexo 2, p. 267):

> *Si ahora generalizamos el caso anterior y tomamos la función $y = \frac{k}{n \cdot x^n}$, siendo el valor $n \geq 2, \ldots$*

Para esta familia de funciones, ocurre que el punto de tangencia $P\left(a, \frac{k}{n \cdot a^n}\right)$ no es el punto medio del segmento que origina la recta tangente con los ejes de coordenada, excepto para el caso $n = 1$, por lo que, en general, no se mantiene la propiedad inicial. En este punto, la estudiante vuelve a plantearse otra pregunta (Anexo 2, p. 270):

También podemos ver que se forma un triángulo OAB cuyos lados son la recta tangente y las asíntotas de la función, en este caso los ejes de coordenadas. Si calculamos el área de dicho triangulo obtenemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde b es $\overline{OB}$ y donde h es $\overline{OA}$, por lo tanto:

$$A = \frac{\frac{(n+1)a}{n} \cdot \frac{k(n+1)}{n \cdot a^n}}{2}$$

$$A = \frac{ak(n+1)^2}{2n^2 \cdot a^n}$$

$$A = \frac{k(n+1)^2}{2n^2 \cdot a^{n-1}}$$

A partir de este resultado, cabe plantarse otras preguntas, por ejemplo: ¿Qué coordenadas debe tener el punto P para que el triángulo OAB sea isósceles?

En esta cuestión denota el área como A, lo que puede inducir a error, ya que anteriormente A era uno de los vértices del triángulo. Hecha esta salvedad, resuelve el problema, llegando a la conclusión de que cuando el punto P sea de coordenadas $\left(\sqrt[n+1]{k}\ ,\ \frac{(n+1)}{n}\sqrt[n+1]{k}\right)$, entonces el triángulo será isósceles (Anexo 2, p. 271).

Por último, vuelve a plantearse una pregunta análoga a una de las anteriores (Anexo 2, p. 271):

Otra pregunta que se puede plantear es qué coordenadas debe tener P para que la hipotenusa AB del triángulo OAB tenga longitud mínima:

En este caso, la complejidad del problema aumenta, ya que la función que hay que minimizar es bastante complicada:

$$h(a) = \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\sqrt{a^{2(n+1)} + k^2}}{a^n}$$

Después de cálculos farragosos, llega a la conclusión de que para el punto de coordenadas $P\left(\sqrt[2n+2]{k^2 n}\ ,\ \frac{\sqrt[n+1]{k}}{\sqrt[2n+2]{n^{3n+2}}}\right)$ se tiene el triángulo de hipotenusa mínima (Anexo 2, p. 273).

Finalizaremos el análisis del caso de las propiedades de las hipérbolas presentando las tablas de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas.

La tabla 5.7 presenta el Dominio 1: Propiedades de las hipérbolas. Resolución del problema inicial. En él aparecen tres familias de actividad, $F_{1,1}$; $F_{1,2}$; $F_{1,3}$; con sus respectivas clases de situaciones. En cuanto a los invariantes operacionales, en este *dominio* la estudiante utiliza conocimientos matemáticos del curso (noción de derivada y significado geométrico) conectando los dos contextos, así como la resolución de sistemas para hallar puntos en común entre funciones y la fórmula tradicional para calcular el área de un triángulo.

PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS (I)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE**	**CLASES DE**	**INVARIANTES**

	ACTIVIDAD	SITUACIONES	OPERACIONALES
D_1 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL	$F_{1,1}$ Recta tangente a $y=1/x$ en $P(a,\frac{1}{a})$	$C_{1,1,1}$ Cálculo de la recta tangente. Uso de la noción de derivada de una función en un punto	- Utilización de un contenido matemático (Derivada) para la resolución del problema inicial - Conexiones entre los contextos funcional y geométrico. Conexiones entre derivada y pendiente de la recta tangente - Resolución de un sistema de ecuaciones para el cálculo del punto de intersección de dos rectas - Uso de la fórmula tradicional para el cálculo del área de un triángulo
	$F_{1,2}$ P es el punto medio de AB	$C_{1,2,1}$ Cálculo de los puntos A y B, intersección de la recta tangente con los ejes de coordenadas	
		$C_{1,2,2}$ Comprobación de que P es el punto medio del segmento $\overline{AB}$	
	$F_{1,3}$ Cálculo del área del triángulo OAB	$C_{1,3,1}$ Utilización de la fórmula tradicional	

Tabla 5.7: Dominio 1. Propiedades de las Hipérbolas

La tabla 5.8 presenta el Dominio 2. Propiedades de las hipérbolas. 1ª Variación del problema inicial. En él aparecen cuatro familias de actividad, $F_{2,1}$; $F_{2,2}$; $F_{2,3}$ y $F_{2,4}$; con sus respectivas clases de situaciones. En cuanto a los invariantes operacionales, éstos se concretan en el planteamiento de una variación en la función inicial $y=1/x$; la búsqueda de invariantes y patrones en el nuevo modelo funcional obtenido, mediante la resolución de algunos problemas asociados al modelo inicial y el planteamiento de algunos otros. También hay un intento constante de conectar, mediante la analogía, los contextos de la función inicial y la obtenida por variación.

PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS (II)			
DOMINIO	FAMILIAS DE ACTIVIDAD	CLASES DE SITUACIONES	INVARIANTES OPERACIONALES
D_2 1ª VARIACIÓN DEL PROBLEMA INICIAL: $y=k/x$	$F_{2,1}$ Recta tangente a $y=k/x$ en $P(a,\frac{k}{a})$	$C_{2,1,1}$ Cálculo de la recta tangente. Uso de la noción de derivada de una función en un punto	- Variación en el problema inicial (estrategia ¿qué si no…? ¿y si…? - Búsqueda de patrones e invariantes al modificar las condiciones iniciales.

	$F_{2,2}$ Relación entre P, A y B	$C_{2,1,2}$ Cálculo de A y B. Intersección de la recta tangente con los ejes	- Estudio de casos especiales: a) Área del rectángulo b) Triángulo isósceles c) Hipotenusa mínima - Uso de la analogía para establecer conexiones entre el contexto inicial y los contextos de los casos especiales.
	$F_{2,3}$ Cálculo del área del triángulo OAB	$C_{2,3,1}$ Utilización de la fórmula tradicional	
	$F_{2,4}$ Variaciones para el caso $y = k/x$	$C_{2,4,1}$ Área del rectángulo de vértices opuestos O y P	
		$C_{2,4,2}$ Cálculo de P para que el triángulo OAB sea isósceles	
		$C_{2,4,3}$ Cálculo de P para que la longitud de $\overline{AB}$ sea mínima	

Tabla 5.8: Dominio II. Propiedades de las Hipérbolas

Las tablas 5.9, 5.10, 5.11, que se presentan a continuación, contienen tres *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas. Como son muy similares, se presentan con un comentario global que sirve para todos ellos.

Los invariantes operacionales de cada uno de los tres dominios se repiten de una forma muy similar:

a) Todos parten de una variación en el problema inicial, generalizando un aspecto del contexto inicial, mediante estrategias similares a ¿qué si no? ¿y si...?

b) Continúan con el uso de la analogía para la búsqueda de similitudes y diferencias entre la función inicial y la obtenida por generalización parcial de la inicial. Establecimiento de conexiones entre contextos.

c) Siempre se resuelve el problema análogo al inicial, mediante el uso de los conocimientos matemáticos adecuados.

d) En alguno de los dominios, no en todos, se plantean y resuelven algunos problemas que constituyen un profundización mediante el estudio de casos especiales o particulares interesantes (triángulo isósceles, hipotenusa de longitud mínima, etc.).

PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS (III)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_3 2ª VARIACIÓN DEL PROBLEMA INICIAL	$F_{3,1}$ Características de las funciones $y = \frac{k}{x-p} + q$	$C_{3,1,1}$ Expresión racional $f(x) = \frac{qx-qp+k}{x-p}$	- Similitudes y diferencias entre las funciones $y = \frac{k}{x}$; $y = \frac{k}{x-p} + q$ - Generalización del problema
		$C_{3,1,2}$ Ecuaciones de las asíntotas $y = q,\ x = p$	

$y = \frac{k}{x-p} + q$	$F_{3,2}$ Resolución del problema análogo al problema inicial	$C_{3,2,1}$ Cálculo de la recta tangente en (a, f(a))	inicial. Estrategia ¿qué si no?, ¿y si…? Abstracción en contexto. - Resolución del problema que generaliza, aunque parcialmente, el problema inicial. - Conexiones entre contextos. Mediante la analogía, búsqueda e identificación de patrones o invariantes. Búsqueda de similitudes y diferencias.
		$C_{3,2,2}$ Cálculo de los puntos A y B de intersección de la recta tangente y las asíntotas	
		$C_{3,2,3}$ Comprobación de que P es el punto medio del segmento $\overline{AB}$	
		$C_{3,2,4}$ Cálculo del área del triángulo OAB (O es el punto de intersección de las asíntotas)	

Tabla 5.9: Dominio III. Propiedades de las Hipérbolas

PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS (IV)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_4 3ª VARIACIÓN DEL PROBLEMA INICIAL	$F_{4,1}$ Características de las funciones $y = \frac{k}{x^n}$	$C_{4,1,1}$ Caso de n par	- Similitudes y diferencias entre las funciones $y = \frac{k}{x}$; $y = \frac{k}{x^n}$, según la paridad de n. - Generalización del problema inicial. Estrategia ¿qué si no?, ¿y si…? Abstracción en contexto. - Resolución del problema que generaliza, parcialmente, el problema inicial. - Conexiones entre contextos. Mediante la analogía, búsqueda e identificación de patrones o invariantes. Búsqueda de similitudes y diferencias.
		$C_{4,1,2}$ Caso de n impar	
	$F_{4,2}$ Resolución del problema análogo al problema inicial	$C_{4,2,1}$ Cálculo de la recta tangente en (a, f(a))	
		$C_{4,2,2}$ Cálculo de los puntos A y B de intersección de la recta tangente y las asíntotas	
		$C_{4,2,3}$ Comprobación de que P no es el punto medio del segmento $\overline{AB}$	

Tabla 5.10: Dominio IV. Propiedades de las Hipérbolas

PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS (V)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_5 4ª VARIACIÓN DEL PROBLEMA INICIAL	$F_{4,1}$ Características de las funciones $y = \frac{k}{n.x^n}$	$C_{4,1,1}$ Caso de n par	- Similitudes y diferencias entre las funciones $y = \frac{k}{x}$; $y = \frac{k}{n.x^n}$, según la paridad de n - Generalización del problema inicial. Estrategia ¿qué si no?, ¿y si…? Abstracción en contexto. - Resolución del problema que
		$C_{4,1,2}$ Caso de n impar	
	$F_{4,2}$ Resolución del problema análogo al problema inicial	$C_{4,2,1}$ Cálculo de la recta tangente en (a, f(a))	
		$C_{4,2,2}$ Cálculo de los puntos A y B de intersección de la recta	

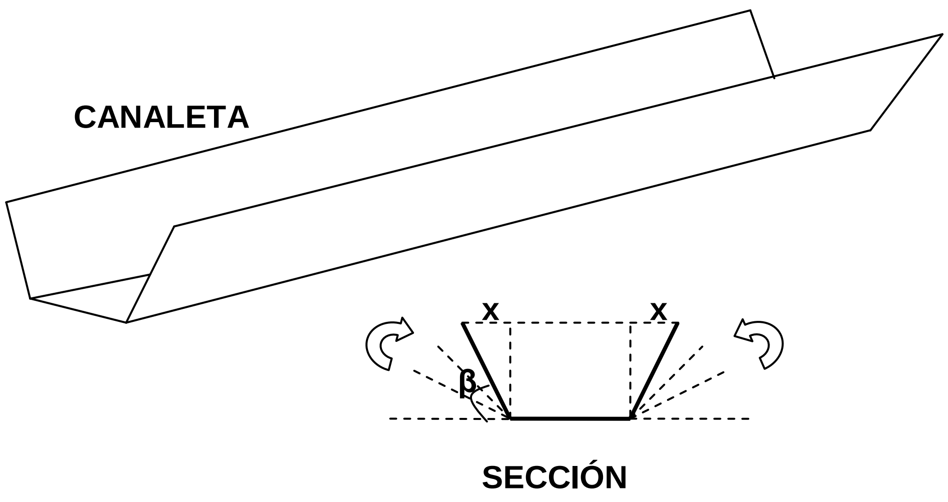
		tangente y las asíntotas	generaliza, en una dirección particular, el problema inicial. - Conexiones entre contextos. Mediante la analogía, búsqueda e identificación de patrones o invariantes. Búsqueda de similitudes y diferencias. - Estudio de casos particulares especiales: a) Triángulo isósceles b) Hipotenusa mínima
		$C_{4,2,3}$ Comprobación de que P no es el punto medio del segmento $\overline{AB}$	
	$F_{4,3}$ Resolución de variaciones del problema, análogas al problema inicial	$C_{4,3,1}$ Cálculo de P para que el triángulo OAB sea isósceles	
		$C_{4,3,2}$ Cálculo de P para que la longitud de $\overline{AB}$ sea mínima	

Tabla 5.11: Dominio V. Propiedades de las Hipérbolas

5.4. EL CASO DE "LA CANALETA PARA EL AGUA"

En el caso siguiente, se trata de estudiar la forma óptima de una canaleta por la que va a circular agua (puede ser un canalón, para desalojar el agua de un tejado o una tubería o canal de conducción para el agua). El documento usado para el análisis es el MC-JS, que es la versión final del informe redactado por el estudiante JS, que recoge el proceso y los resultados conseguidos. El problema inicial planteado por el profesor al estudiante es el que sigue:

Con una plancha rectangular, cuyas dimensiones son 5 m. de largo y 45 cm. de ancho, se desea construir una canaleta, doblando el ancho en tres partes iguales para que la sección sea un trapecio isósceles.



Demuestra que la expresión del volumen de agua que cabe en la canaleta, en cm^3*, en función de* ***x****, responde a la fórmula:*

$$F(x) = 500.(15 + x).\sqrt{225 - x^2}$$

A continuación, averigua el valor de ***x*** *para que el volumen de agua sea el mayor posible. Dar sentido razonado al resto de valores de x, posibles extremos de la función F(x).*

El estudiante comienza su informe haciendo explícito el objetivo del mismo, lo que añade claridad a la meta que va a perseguir (Anexo 3, p. 276):

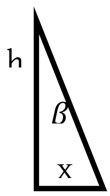
En el siguiente informe vamos a investigar las distintas variables que definen una canaleta para recoger agua cuya sección transversal es un trapecio para concluir con la forma óptima de la canaleta.

En un principio, se atiene a las cuestiones planteadas en el problema inicial, encontrado la función volumen y optimizando en función de la distancia x, señalada en el enunciado inicial. Además analiza los valores encontrados, desechando el valor de x negativo...

Una vez resuelto el problema inicial, se plantea las mismas preguntas, pero modificando la variable independiente (Anexo 3, p. 277):

Otra variable que define el volumen de agua es el ángulo de giro de los laterales de la canaleta. Por ello vamos a estudiar la función que defina el volumen ***según el ángulo (β).***

$\sin(\beta) = \frac{h}{15}$; $\cos(\beta) = \frac{x}{15}$



$$Altura = 500\ cm\ ; Área\ de\ la\ base = \frac{h(B1+B2)}{2}\ cm^2$$

$$B1 = 15\ ; B2 = 15 + 2x\ ; x = cos(\beta)\ 15\ ; h = sin(\beta)\ 15$$

$$Volumen = 500[15\, sin(\beta)]\left[\frac{15 + 15 + 30\, cos(\beta)}{2}\right]$$

$$Volumen = 500 \cdot 15 \cdot sin(\beta) \cdot \left[\frac{30 + 30\, cos(\beta)}{2}\right] = 7500\, sin(\beta)\, [15 + 15\, cos(\beta)]$$

$$Volumen = 7500\, sin(\beta)\, 15[1 + cos(\beta)] = 112500[1 + cos(\beta)]\, sin(\beta)$$

Tras haber hallado la fórmula que define el volumen de agua en la canaleta, vamos a buscar el valor de β para el cual el volumen de agua es máximo.

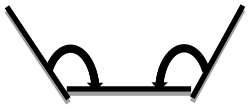
Como puede observarse, el ángulo β, que aparecía en el enunciado inicial, es considerado como la nueva variable para resolver el problema en función de ella. Lo que está haciendo el estudiante es profundizar en el problema a través de otras formas de resolverlo, que es una de las estrategias para comenzar la última fase del proceso de resolución de problemas (visión retrospectiva en el modelo de Polya (1954); revisión extensión en el de Mason, Burton y Stacey (1985)).

Una vez conseguida la nueva función volumen, en función del ángulo β, se plantea la búsqueda de valor para el cual el volumen del agua es máximo.

Tras derivar la función y calcular los ceros de la función derivada, llega a una ecuación de segundo grado que resuelve y analiza el significado de las dos soluciones (Anexo 3, p. 277):

$$225000\,A^2 + 112500\,A - 112500 = 0$$

$$A = \frac{-112500 - \sqrt{112500^2 + 4(112500^2 \cdot 2)}}{450000} = -1$$



Canaleta cuyo β *vale* π

Esta solución no tiene sentido porque $arccos(-1) = \pi\ rad$ *con lo que no existiría la canaleta.*

$$\frac{-112500 + \sqrt{112500^2 + 4(112500^2 \cdot 2)}}{450000} = 0{,}5\,;\, arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

El valor de β *para que el volumen de agua que quepa en la canaleta sea máximo es de* $\frac{\pi}{3}$ *radianes o* 60°.

Una vez encontrado el máximo de la función, vuelve a la solución inicial del problema (en función de x) y la compara con la solución encontrada en función del ángulo β, para verificar la coherencia y no contradicción de las dos soluciones (Anexo 3, p. 277):

Para comprobar que los valores obtenidos, para que el volumen de agua en la canaleta sea máximo, son correctos, vamos a utilizar la relación entre x y β*.*

Como hemos visto en el apartado anterior, $cos(\beta) = \frac{x}{15}$ *, por lo tanto, si el valor de x es 7,5:*

$$cos(\beta) = \frac{7{,}5}{15} = 0{,}5\,;\, arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Como podemos ver, los valores que hemos obtenido anteriormente verifican la relación, con lo que podemos afirmar que estos valores son válidos.

Una vez comprobado que los dos valores son coherentes y representan el mismo máximo, pero para dos funciones distintas, se plantea verificar que puede obtener una función a partir de la otra, por lo que el proceso de verificación de las dos funciones queda concluido (Anexo 3, p. 278):

Para comprobar la equivalencia entre las funciones, vamos a tratar de obtener la función $g(\beta)$ *desde la función* $f(x)$*.*

[….]

Como hemos podido comprobar, se verifica que, considerando la relación entre β *y x, podemos llegar a* $g(\beta)$ *desde* $f(x)$

Se han eliminado los cálculos de la transformación de una función en otra, ya que no tienen interés en este análisis.

Posteriormente se plantea una nueva modificación, que consiste en la generalización del valor de la anchura de la plancha generadora de la canaleta (Anexo 3, p. 278):

Hasta este punto, hemos resuelto las cuestiones tomando como valor de anchura 45 centímetros, pero ahora vamos a plantearnos estas mismas cuestiones con un valor supuesto de anchura igual a $3a$*, siendo a un número real positivo, para generalizar el modelo.*

[….]

$$Volumen = 500\frac{1}{2}(a + a + 2x)\sqrt{a^2 - x^2} = 500(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Tras haber hallado la función que define el volumen en función de x, vamos a pasar a hallar el valor de x para el cual el volumen es máximo.

[….]

$$f'(x) = 500\sqrt{a^2{-}x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(500a + 500x); \qquad f'(x) = 0$$

[….]

$$-2x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4}$$

$$x = \frac{a + \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4} = \frac{a + \sqrt{9a^2}}{-4} = \frac{a + 3a}{-4} = \frac{4a}{-4} = -a$$

Esta solución no tiene sentido físico, ya que no puede ser negativa una longitud.

$$x = \frac{a - \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4} = \frac{a - \sqrt{9a^2}}{-4} = \frac{a - 3a}{-4} = \frac{-2a}{-4} = \frac{a}{2}$$

Con este resultado podemos determinar que la longitud de x para que el volumen de agua que cabe en la canaleta sea máximo tiene que valer $\frac{a}{2}$ *cm siendo* $3a$ *la medida de la anchura de la plancha con la que se fabrica la canaleta.*

Como puede observarse, una vez calculada la nueva función volumen, se plantea calcular el valor para que el volumen sea máximo, lo que equivale a resolver el problema inicial en el nuevo contexto. Para ello calcula los ceros de la función derivada. Una vez obtenidas las soluciones, interpreta el significado de las posibles soluciones, quedándose con la adecuada a la situación.

Posteriormente, resuelve el mismo problema (con el valor genérico *a* de la anchura de la plancha) por otro camino, tomando como función volumen la que tiene como variable independiente el ángulo β . También en este caso llega a que el máximo sigue siendo $\beta = \frac{\pi}{3}$, que no depende de la anchura de la plancha (Anexo 3, p. 280):

Hasta este punto del informe, los cálculos han sido realizados tomando como modelo una canaleta con las tres paredes iguales. A partir de aquí, el modelo que vamos a utilizar será una canaleta en la que la anchura del fondo, b, sea distinta de la de las paredes laterales, a, y la de éstas sea igual entre ellas.

Como se observa, el estudiante vuelve a modificar las condiciones del problema inicial, generalizando el contexto del modelo planteado. En estas nuevas condiciones vuelve a resolver el problema, calculando el valor de x en función de a y b, que maximiza el volumen de agua de la nueva canaleta. Resulta (MC-JS-13, p. 6) el valor:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}$$

Una vez resuelto el problema general, se vuelve a plantear el segundo camino de obtención de ese valor utilizando la función volumen en función del ángulo β (Anexo 3, p. 281):

Tras haber hallado este valor, vamos a hallar el valor del ángulo de giro de las paredes laterales de la canaleta que hace máximo el volumen de agua que cabe en ésta.

[….]

$$g(\beta) = sin(\beta)\,[500ba + 500a^2\,cos(\beta)]$$

[….]

$$g'(\beta) = cos(\beta)\,[500ba + 500a^2\,cos(\beta)] + [-500a^2\,sin(\beta)]\,sin(\beta)$$

[….]

$$g'(\beta) = 0$$

[….]

$$cos(\beta) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\ ; \quad (\beta) = arc\,cos\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\right)$$

De esta forma, podemos afirmar que el valor de β que hace que el volumen de agua que cabe en la canaleta sea máximo es $arccos\left(\frac{-b-\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}\right)$.

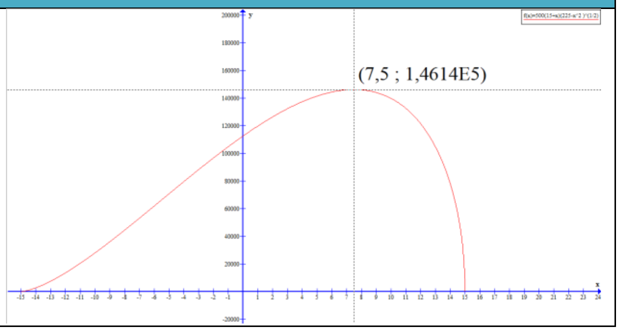
Además, utilizando la relación entre x y β podemos comprobar que los resultados obtenidos son correctos.

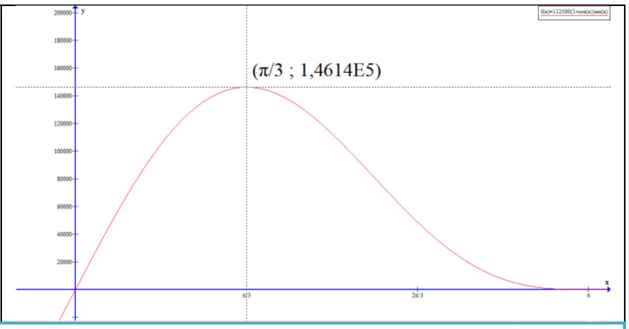
Después de todo lo anterior, se puede afirmar que JS utiliza una de las dos funciones como instrumento de control de errores para los resultados obtenidos con la otra. Siempre comprueba que los resultados obtenidos mediante los dos caminos son coherentes y no hay errores.

El informe del estudiante continúa haciendo una reflexión sobre lo obtenido, (Anexo 3, p. 282):

Una vez generalizado el modelo vamos a hacer una valoración de los datos obtenidos y de los distintos valores que podrían tomar las variables.

Para ello hace una representación gráfica de las dos funciones en las cercanías de los valores máximos, analizando los valores que toma y comprobando la veracidad de sus cálculos (Anexo 3, p. 282):

Variable	Dominio con sentido físico	Representación gráfica
X	De 0 a a	

$\boldsymbol{\beta}$	De 0 a $\pi/2$	

Como se puede observar en ambas funciones, según nos acercamos al máximo por la izquierda, el volumen va aumentando, y según nos alejamos de él por la derecha, el volumen vuelve a disminuir.

Como complemento a sus reflexiones, se plantea la cuestión de que habitualmente estas canaletas tienen forma semicircular (Anexo 3, p. 283):

> *Si bien es cierto que los valores obtenidos en este informe son correctos teniendo en cuenta el modelo que se ha utilizado, en la realidad no se utiliza este tipo de canaleta, sino que tienen forma semicilíndrica dado que el volumen que puede albergar, utilizando la misma plancha para su fabricación, es mayor.*

En este punto del informe, el estudiante hace un contraste de los resultados que se obtienen del volumen máximo para la canaleta del problema inicial y otra de las mismas dimensiones pero de sección semicircular (Anexo 3, p. 283):

> *Pongamos que fabricamos una canaleta con una plancha de 45 centímetros de ancho y 5 metros de largo, como hemos hecho en este informe en el primer apartado. Si la forma de la canaleta es como la de este informe, y tomamos los valores máximos que hemos hallado anteriormente, el volumen máximo que podemos obtener es:*
> *[….]*
>
> $$Volumen = 500\frac{(15+15+7{,}5+7{,}5)\sqrt{225-7{,}5^2}}{2} = 146141.7869\ cm^3$$
>
> *Si la forma de la canaleta es semicilíndrica, entonces el volumen aumenta drásticamente.*
>
> $$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura\,;\ Área\ de\ la\ base = \frac{\pi r^2}{2}\,; Altura = 500\ cm$$
>
> $$Longitud = 2\pi r = 90; r = \frac{90}{2\pi}\,; Área\ de\ la\ base = \frac{\pi\left(\frac{90}{2\pi}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{8100}{4\pi^2}}{2} = \frac{8100\pi}{8\pi^2} = \frac{8100}{8\pi}$$
>
> $$Volumen = \frac{8100}{8\pi}500 = 161144.3799\ cm^3$$
>
> *Tras estas operaciones comprobamos que, con las mismas medidas, el volumen es mayor en una canaleta de forma semicilíndrica que en una canaleta de forma trapezoidal.*

Este resultado, que ya demuestra la mejora que suponen las canaletas semicirculares, anima al estudiante a hacer una aproximación del valor de la superficie de la sección (la largura no influye) de una canaleta que tenga forma de polígono regular. Finaliza haciendo un comentario sobre la conveniencia de que la sección sea semicircular para que el volumen de agua sea mayor (MC-JS, p. 9). Se omite la copia literal pues no está completo y no aporta nada al análisis efectuado.

Finalizaremos el análisis del caso de la canaleta para el agua presentando las tablas de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas.

El proceso se ha dividido en cinco *Dominios* de situaciones:

- Dominio I. Resolución del problema inicial mediante un proceso de modelización
- Dominio II. Primera variación del problema inicial. Cambio de variable independiente. Resolución del problema con la nueva variable. Comparación de resultados con el problema inicial.
- Dominio III. Segunda variación del problema inicial. Asignación de un valor genérico a una de las cualidades (datos) del problema inicial. Resolución del problema en el nuevo contexto, para las dos variables independientes de los *dominios anteriores.* Comparación de resultados.
- Dominio IV. Tercera variación del problema inicial. Asignación de valores genéricos a dos cualidades del problema inicial. Resolución del problema en el nuevo contexto, para las dos variables independientes de los *dominios anteriores.* Comparación de resultados: visualización mediante representación gráfica de funciones volumen con las dos variables independientes.
- Dominio V. Cuarta variación del problema inicial. Modificación de la forma de la sección de la canaleta: semicircular, cuadrado, pentágono, polígono regular de n lados. Conclusiones.

Las tablas siguientes, 5-12 a 5-16 desarrollan todas las familias, clases de situaciones de cada dominio, junto con los invariantes operacionales de cada uno.

<table>
<tr><th colspan="4">CANALETA PARA EL AGUA (I)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">D_1
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL</td><td rowspan="2">$F_{1,1}$
Función volumen para un prisma de base trapezoidal</td><td>$C_{1,1,1}$ Cálculo del área de la base (sección de la canaleta)</td><td>- Uso de conocimientos académicos explícitos</td></tr>
<tr><td>$C_{1,1,2}$ Cálculo del volumen (variable independiente x)</td><td rowspan="2">- Proceso de matematización y modelización:
a) Comprensión y concreción del problema real
b) Problema matemático, enunciado y resolución.</td></tr>
<tr><td>$F_{1,2}$
Máximo de la función</td><td>$C_{1,2,1}$ Cálculo de la derivada primera</td></tr>
</table>

	volumen	$C_{1,2,2}$ Cálculo de los ceros de la derivada	Modelo matemático c) Solución matemática d) Solución real. Validación e Interpretación e) Evaluación del modelo. Limitaciones, mejoras, variaciones.
		$C_{1,2,3}$ Interpretación de las soluciones.	

Tabla 5.12: Dominio I. Canaleta para el agua

CANALETA PARA EL AGUA (II)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_2 1ª VARIACIÓN EN EL PROBLEMA INICIAL	$F_{2,1}$ Función volumen con una variable independiente distinta	$C_{2,1,1}$ Selección de la nueva variable independiente	- Profundización en el problema inicial: resolución por otro camino. - Proceso de matematización y modelización: a) Comprensión y concreción del problema. Selección de la variable o cualidad b) Problema matemático, enunciado y resolución. Modelo matemático c) Solución matemática d) Solución real. Validación e Interpretación. e) Evaluación del modelo. Limitaciones, mejoras, variaciones. - Uso de conocimientos académicos explícitos - Conexión entre los dos contextos funcionales. Búsqueda de relaciones. Semejanzas y diferencias: a) Variables independientes b) Funciones c) Soluciones
		$C_{2,1,2}$ Cálculo del área de la base (sección)	
		$C_{2,1,3}$ Cálculo de la función volumen	
	$F_{2,2}$ Máximo de la función volumen	$C_{2,2,1}$ Cálculo de la derivada primera	
		$C_{2,2,2}$ Cálculo de los ceros de la derivada	
		$C_{2,2,3}$ Interpretación de las soluciones.	
	$F_{2,3}$ Comparación de las dos funciones volumen	$C_{2,3,1}$ Relación entre las dos variables, x, β	
		$C_{2,3,2}$ Relación entre las dos funciones	
		$C_{2,3,3}$ Relación entre las dos soluciones para el máximo	

Tabla 5.13: Dominio II. Canaleta para el agua

CANALETA PARA EL AGUA (III)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**

D_3 2ª VARIACIÓN EN EL PROBLEMA INICIAL	$F_{3,1}$ Función volumen con una cualidad (dato) genérico	$C_{3,1,1}$ Selección de la cualidad y asignación del valor genérico	- Variación en el problema inicial. Generalización. Estrategia ¿qué si no…? ¿y si…? - Proceso de matematización y modelización: a) Comprensión y concreción del problema. Selección de la variable o cualidad. b) Problema matemático, enunciado y resolución. Modelo matemático c) Solución matemática d) Solución real. Validación e Interpretación de las soluciones. e) Evaluación del modelo. Limitaciones, mejoras, variaciones. - Profundización en el problema inicial: variación en el problema. - Uso de conocimientos académicos explícitos - Conexión entre los dos contextos funcionales. Búsqueda de relaciones. Semejanzas y diferencias: a) Variables independientes b) Funciones c) Soluciones
		$C_{3,1,2}$ Cálculo del área de la base (sección)	
		$C_{3,1,3}$ Cálculo de la función volumen	
	$F_{3,2}$ Máximo de la función volumen	$C_{3,2,1}$ Cálculo de la derivada primera	
		$C_{3,2,2}$ Cálculo de los ceros de la derivada	
		$C_{3,2,3}$ Interpretación de las soluciones.	
	$F_{3,3}$ Resolución por otro camino (con la variable β)	$C_{3,3,1}$ Cálculo de la función volumen con la nueva variable	
		$C_{3,3,2}$ Cálculo del máximo de la función	
		$C_{3,3,2}$ Interpretación de las soluciones en el contexto	
	$F_{3,4}$ Comparación de resultados	$C_{3,4,1}$ Verificación de la igualdad de las soluciones para el máximo	

Tabla 5.14: Dominio III. Canaleta para el agua

CANALETA PARA EL AGUA (IV)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_4 3ª VARIACIÓN EN EL PROBLEMA INICIAL	$F_{4,1}$ Función volumen con dos cualidades (datos) genéricas	$C_{4,1,1}$ Selección de cualidades y asignación de valores genéricos	- Elección de cualidades para hacerlas genéricas. Generalizaciones en el contexto - Variación en el problema inicial. Generalización. Estrategia ¿qué si no…? ¿y si…?
		$C_{4,1,2}$ Cálculo del área de la base (sección)	

		$C_{3,1,3}$ Cálculo de la función volumen	- Proceso de matematización y modelización: a) Comprensión y concreción del problema. Selección de la variable o cualidad. b) Problema matemático, enunciado y resolución. Modelo matemático c) Solución matemática d) Solución real. Validación e Interpretación de las soluciones. e) Evaluación del modelo. Limitaciones, mejoras, variaciones. - Profundización en el problema inicial: resolución por otro camino. - Uso de conocimientos académicos explícitos - Conexión entre los dos contextos funcionales. Búsqueda de relaciones. Semejanzas y diferencias: a) Variables independientes b) Funciones c) Soluciones - Conexiones entre el contexto analítico-algebraico y el funcional-gráfico
	$F_{4,2}$ Máximo de la función volumen	$C_{4,2,1}$ Cálculo de la derivada primera	
		$C_{4,2,2}$ Cálculo de los ceros de la derivada	
		$C_{4,2,3}$ Interpretación de las soluciones.	
	$F_{4,3}$ Resolución por otro camino (variable ángulo β)	$C_{4,3,1}$ Cálculo de la función volumen con la nueva variable	
		$C_{4,3,2}$ Cálculo del máximo de la función	
		$C_{4,3,2}$ Interpretación de las soluciones en el contexto	
	$F_{4,4}$ Análisis de resultados	$C_{4,4,1}$ Comparación de resultados. Verificación de la no contradicción de las soluciones para el máximo	
		$C_{4,4,2}$ Visualización de resultados. Gráficas de las funciones	
		$C_{4,4,3}$ Comportamiento de las funciones en las proximidades de los máximos.	

Tabla 5.15: Dominio IV. Canaleta para el agua

CANALETA PARA EL AGUA (V)			
DOMINIO	**FAMILIAS DE ACTIVIDAD**	**CLASES DE SITUACIONES**	**INVARIANTES OPERACIONALES**
D_5 4ª VARIACIÓN EN EL PROBLEMA INICIAL	$F_{5,1}$ Resolución del problema inicial con sección semicircular	$C_{5,1,1}$ Selección de la cualidad "forma semicircular"	- Proceso de matematización y modelización: a) Comprensión y concreción del problema b) Problema matemático, enunciado y resolución. Modelo matemático
		$C_{5,1,2}$ Cálculo del volumen para la forma semicircular.	
	$F_{5,2}$ Comparación de resultados	$C_{5,2,1}$ Cálculo del volumen máximo para	

		sección trapecio (problema inicial)	c) Solución matemática d) Solución real. Validación e Interpretación. e) Evaluación del modelo. Limitaciones, mejoras, variaciones. - Conexiones entre el contexto del problema y la realidad (secciones semicirculares) - Particularizaciones y generalizaciones. Búsqueda de patrones y leyes generales. Abstracción en contexto
		$C_{5,2,2}$ Comparación de volúmenes. Caso sección trapecio o semicírculo	
	$F_{5,3}$ Cálculo de la superficie de la sección de la canaleta si tiene forma de polígono regular	$C_{5,3,1}$ Concreción de valores de la cualidad forma: cuadrado, pentágono, hexágono	
		$C_{5,3,2}$ Cálculo del área de la base (sección de la canaleta)	
		$C_{5,3,3}$ Cálculo de la sección en un n-ágono regular	

Tabla 5.16: Dominio V. Canaleta para el agua

5.5. EL CASO DE "LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN EL ESPACIO"

En el caso de las progresiones aritméticas en el espacio, es el trabajo de la estudiante P.I. sobre progresiones aritméticas en tablas numéricas bidimensionales. Como el trabajo de esta estudiante es el que sirvió de base para la experimentación 2 y 3 (ver capítulo 4), se presenta, en primer lugar, el índice general del trabajo, para ilustrar el enfoque general del mismo(documento TN-PI, Anexo 4, p. 287):

1. Introducción
2. Un problema
2.1. Entrada-exploración inicial
2.2. Ataque
2.3. Revisión-Extensión
2.3.1. Altermativa 1
2.3.2. Alternativa 2
2.3.3. Alternativa 3
2.3.4. Alternativa 4
3. Preguntas, conjeturas, nuevas ideas
3.1. Algunas vías de generalización
3.1.1. Un problema más general
3.1.2. Unos conceptos más generales
3.2. Variaciones sobre el problema
3.2.1. Un caso no determinado
3.2.2. Unos casos con las diferencias iguales
3.3. Estructura del problema
4. Conceptos, propiedades y teoremas nuevos
4.1. Redes aritméticas
4.2. Redes aritméticas unidimensionales y progresiones aritméticas
4.3. Redes aritméticas bidimensionales y matrices
4.4. El número de Priscila asociado a una red aritmética
4.4.1. Para redes aritméticas bidimensionales

4.4.2. El caso de las redes aritméticas tridimensionales
4.4.3. El caso de las redes aritméticas n-dimensionales
4.5. Vuelta al problema inicial
5. Problemas abiertos
6. Reflexión final
7. Bibliografía

En primer lugar, se puede observar que la estudiante, durante el proceso de resolución del problema inicial, utiliza la terminología de Mason, Burton y Stacey (1988) para nombrar los apartados del punto 2. Esto es debido a las orientaciones del profesor sobre la terminología a utilizar en estos apartados. En el punto 3 profundiza en el problema inicial y en el punto 4 expone los conceptos de la nueva teoría, que generaliza la idea de progresión aritmética (p.a.) tradicional, definiendo los conceptos análogos en el espacio y presentando algunas propiedades o teoremas de los mismos.

Como se puede observar, los puntos 2 y 3 conforman el proceso de transformación de una tarea de resolución de problemas en una PIM. Para ilustrar este hecho, nos fijaremos en los puntos 3.1.2. y 3.3.

La estudiante comienza resolviendo el problema (punto 2 del índice) de varias maneras (Anexo 4, p. 290-293), concretamente plantea 4 formas diferentes de resolverlo. Posteriormente se plantea algunas generalizaciones, de las que nos fijaremos en el punto 3.1.2. (Anexo 4, p. 294), titulado *Unos conceptos más generales*:

Estos “cuadrados aritméticos” son unas figuras en el plano (espacio bidimensional) que tienen sus análogas en la recta (espacio unidimensional) y en el espacio tridimensional. Vamos a exponerlo de una manera gráfica:

Dado el siguiente cuadrado aritmético (fig. 16), la análoga en la recta es la progresión aritmética tradicional (figura 17) y en el espacio es el paralelepípedo aritmético (figura 17 bis).

y	*t*	
x	*z*	

Fig. 16: cuadrado aritmético

…•……………………………………………•…………

x *y*

Fig. 17: recta aritmética

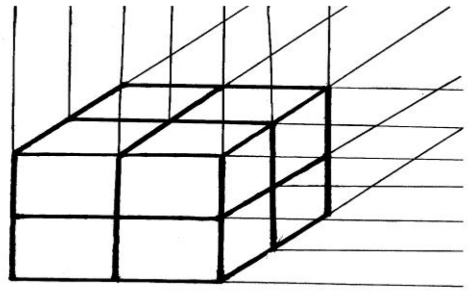


Fig 17 bis: paralelepípedo aritmético

La figura análoga al cuadro aritmético, en el espacio tridimensional, sería el "cubo, o paralelepípedo aritmético", que sería una red de cubitos, y en cada celdilla habría un número. El número mínimo de cubitos que habrían de darnos para completar el cubo aritmético parece que debería ser ocho, por analogía con el plano y la recta, pero esto es una conjetura.

Llegados a este punto, también nos preguntamos si todo lo dicho para progresiones aritméticas serviría para progresiones geométricas, para lo que deberíamos cambiar las sumas por multiplicaciones, las restas por divisiones y los productos por potencias.

En este momento, se puede ver que la estudiante, mediante el uso de la *analogía,* la *contextualización*, las *conexiones entre contextos* y la *abstracción en contextos,* esboza preguntas, se plantea alguna conjetura sobre posibles resultados generales y conecta el contexto de las progresiones aritméticas con el de las progresiones geométricas, Esto es un primer acercamiento a la obtención de preguntas generales o problemas de investigación.

Volviendo al índice del trabajo, la estudiante prosigue con el punto 3.2. (Anexo 4, p. 295-298), *Variaciones sobre el problema*, donde presenta el estudio de diferentes casos obtenidos por *modificaciones de las condiciones* del problema inicial, para finalizar en el punto 3.3. (Anexo 4, p. 299), titulado *Estructura del problema,* donde dice:

Después de todo lo anterior, estamos en condiciones de hacer un análisis de la estructura del problema, de manera que podamos observar toda su riqueza, su complejidad, etc.

La estructura interna del problema se compone de:

- *Cuadrado.*
- *Valores numéricos dados: cuatro números enteros.*
- *Progresiones aritméticas con sus respectivas diferencias.*

La estructura del problema varía cuando cambiamos alguna de las variables dadas:

- *Cuadrado: Rectángulo, Recta, Cubo, Paralelepípedo, etc*
- *Números dados: cuatro.¿Será el mínimo número? Si nos dan 3… Y si nos dan valores de las diferencias…*
- *Progresiones aritméticas: Geométricas*

- *Números enteros positivos: Números enteros, Números fraccionarios, etc.*

*Todas las cuestiones enumeradas hacen referencia a un problema más abierto que podría tener por enunciado: **"¿Bajo qué condiciones podemos construir: un cubo, un paralelepípedo, un cuadrado, una recta o un rectángulo aritméticos?"***

Como se puede observar, la estudiante utiliza la terminología propuesta por el profesor: *estructura del problema*, explicado más arriba, en el episodio anterior. El proceso finaliza con el enunciado de un problema de investigación o, lo que es equivalente, con el planteamiento de un posible PIM.

El trabajo de la estudiante prosigue, intentando resolver el problema de investigación planteado, pero eso no tiene interés para el proceso de transformación de una tarea de R.P. en un PIM. En cuanto a los niveles de organización de las actividades desarrolladas por la estudiante, se presentan organizadas en un dominio $\mathbf{D_1}$, que engloba todas las familias de actividad $\mathbf{F_{1,i}}$ y clases de situaciones, $C_{1,i,j}$

Con el análisis de los pasos dados por la estudiante, podríamos adelantar que el proceso tiene 3 fases:

1. **Resolución del problema inicial**. Se trata de resolver el problema planteado, mediante; a) la utilización de algún modelo para la resolución de problemas o; b) a través de un proceso de matematización o de modelización.

2. **Búsqueda de la estructura del problema inicial**. Una vez resuelto, se trata de: a) trabajar a fondo la última de las fases del proceso de resolución de problemas que plantean los modelos mencionados en la fase anterior (resolverlo de otras maneras, plantearse nuevas preguntas, generalizaciones, casos particulares, variantes que modifiquen el número de soluciones, problemas relacionados, conectarlo con otros contextos, etc.), o; b) profundizar en la última fase del proceso de matematización (la interpretación de la solución en el contexto del problema real, nivel de adecuación de la solución, planteamiento de otras posibles soluciones, etc.) o de modelización (limitaciones de la solución, mejoras posibles del modelo, búsqueda de otros modelos, generalizaciones, soluciones en otros contextos, etc.) Mediante estas tareas se llegan a conocer a fondo las características esenciales del problema, prescindiendo de los datos concretos del enunciado inicial; se reitera el proceso de modelización o matematización en otros contextos reales o de las matemáticas.

3. **Obtención del problema o problemas de investigación**. Como resultado del trabajo anterior, se pueden identificar las variables que intervienen en el problema, los valores que toman, qué otros valores podrían tomar, las condiciones que relacionan unos datos con otros, etc. A partir de ello se puede

construir un nuevo enunciado, más abierto y general, que constituya el problema de investigación y sea el núcleo de una investigación matemática.

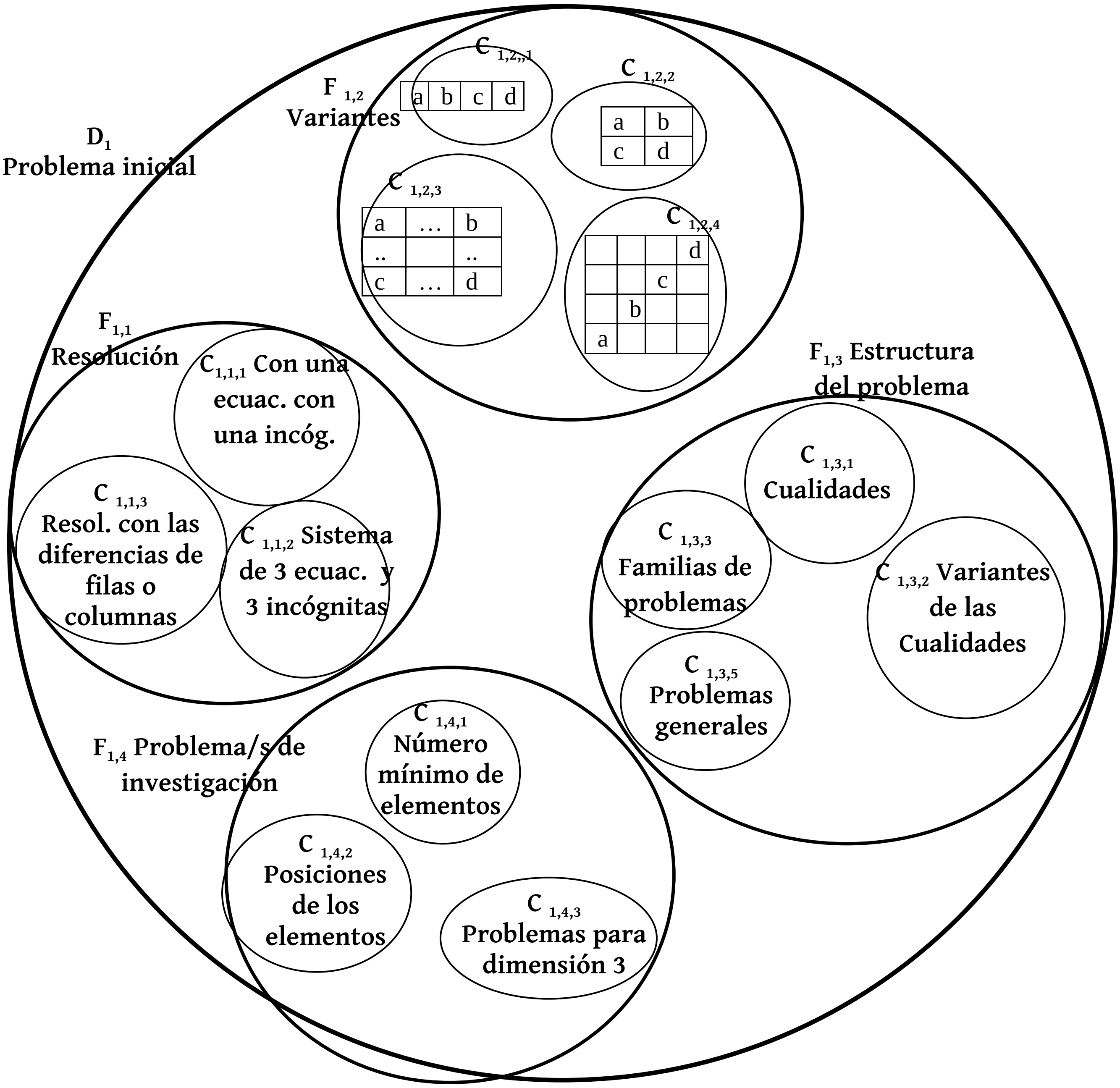


Figura 5.17: Dominio de actividad para “tablas numéricas”

5.6. PROPUESTA DE MODELO PARA EL PROCESO

El estudio de los cinco casos ha permitido recoger, a partir de los informes elaborados por los estudiantes (considerándolos como instrumentos), los principales invariantes operacionales puestos en práctica por los estudiantes, que forman parte de sus *esquemas* (parte psicológica del instrumento). Se presentan en la tabla 5.17.

Si se comparan estos invariantes operacionales con los procesos cognitivos del modelo de Yeo y Yehap (2009A, p. 7), donde proponen un modelo para las tareas de investigación, caracterizando, por un lado las fases del proceso de trabajo de los estudiantes y, por otro, los procesos cognitivos que se dan y las interacciones que se producen entre ellos (ver capítulo 2 punto 2.1.7.), vemos que en el paso de una tarea de R.P. a un proyecto de investigación también se dan esos procesos cognitivos, junto otros que permiten *extender* la tarea de R.P. hasta llegar a hacer explícito el problema de investigación.

INVARIANTES OPERACIONALES
Particularización. Ejemplos genéricos. Casos especiales
Patrones e invariantes. Similitudes, diferencias
Generalización. Abstracción en contexto
Conjeturas: construcción y justificación
Demostración matemática
Procesos de Matematización - Modelización
Variaciones en el problema. Estrategias ¿qué si no?, ¿y si?...
Contextualización
Conexiones entre contextos
Otras estrategias heurísticas para R.P.: recuento de casos, lenguaje apropiado (gráfico, algebraico, etc.), ...

Tabla 5.17: Invariantes operacionales

Como resultado de la reflexión sobre los casos estudiados, se presenta una primera aproximación explicativa del proceso, en forma de esquema gráfico, con las fases y los principales procesos matemáticos que puede poner en práctica el estudiante (Fig. 5.18)

La Figura 5.18 contiene todos estos aspectos comentados:

- Fases del proceso. La primera fase es la resolución de problema inicial, mediante procesos de matematización-modelización (con sus fases) o mediante el uso de algún modelo de resolución de problemas (con sus fases). La segunda fase es la búsqueda de la estructura del problema inicial, mediante la profundización en algún aspecto del mismo (otras formas de resolución, planteando nuevas preguntas en el problema, resolviendo problemas relacionados, obtenidos por variaciones en los datos del mismo, estudio de casos particulares, buscando patrones, conjeturando, etc.). La tercera fase es la obtención del proyecto de investigación, que se considera concluida una vez que se ha conseguido concretar el problema o problemas de investigación. En esta fase es muy eficaz la variación libre de las cualidades del problema inicial, la generalización del contexto del problema inicial, uso de estrategias adecuadas, etc.

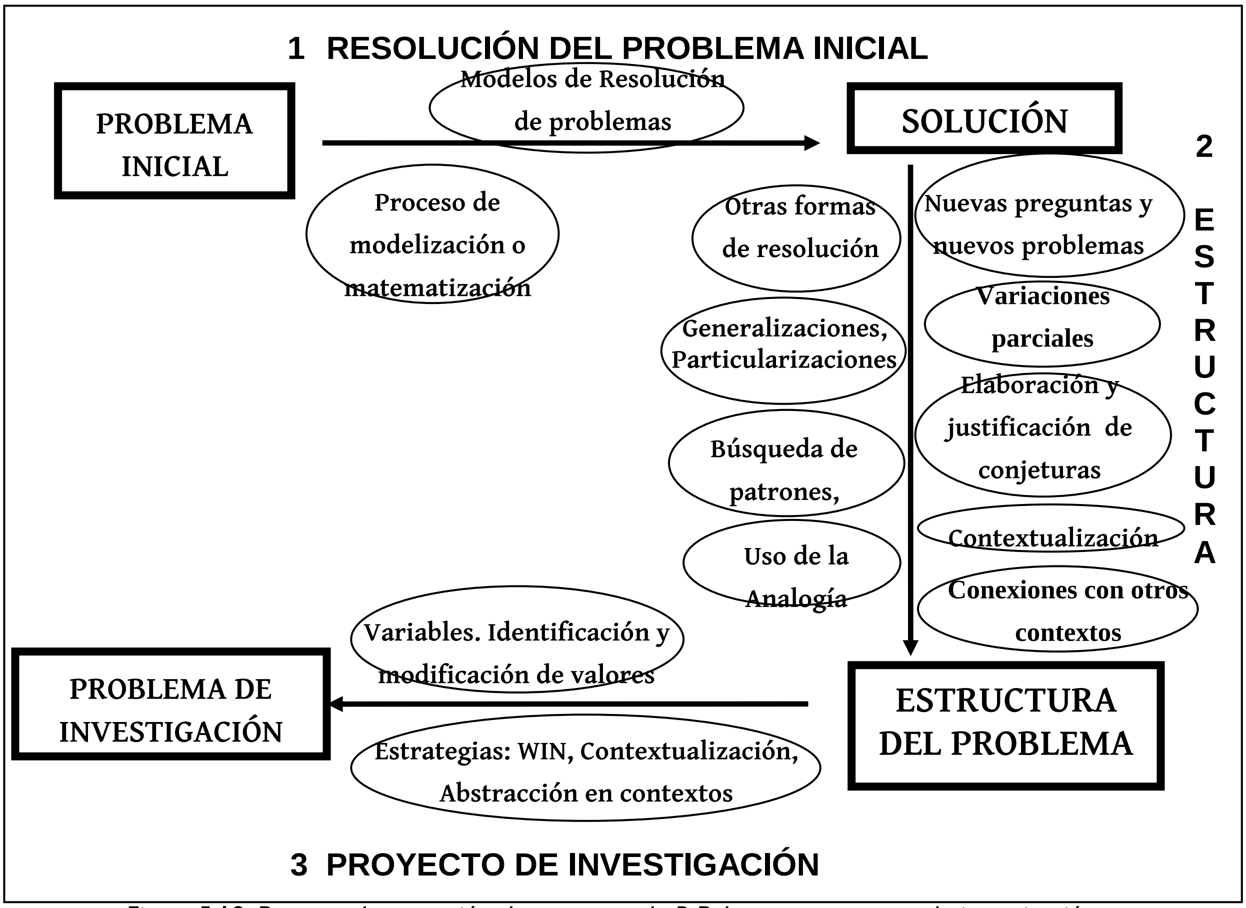


Figura 5.18: Proceso de extensión de una tarea de R.P. hasta un proyecto de investigación

- Procesos matemáticos. Los procesos cognitivos matemáticos que pone en práctica el estudiante son, por una parte, los conocimientos académicos explícitos, que ha adquirido en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que están explícitos en su mente (razonamientos, reglas de acción, conceptos, etc.); pero, por otra parte, también pone en práctica procesos de pensamiento que son conocimientos no explícitos, no formales y no científicos, los denominados invariantes operacionales, que son los que se han identificado en el estudio de los casos. Estos procesos mentales forman parte de las actividades que lleva a cabo el estudiante en el proceso de extensión de una tarea de R.P. a un proyecto de investigación.

El esquema gráfico de la Figura 5.18. no tiene una estructura lineal sino laberíntica; es decir, las fases no se desarrollan de manera secuenciada: primero la fase 1, luego la fase 2 y luego la fase 3, sino que en cualquiera de las dos primeras fases, el estudiante puede comenzar a atisbar, a tener indicios en su mente, a conjeturar mentalmente, etc., distintas opciones sobre posibles campos de investigación, problemas de investigación, etc. que el proceso le permitirá ir reforzando y consolidando (por su interés y valía) mediante el contraste de ideas (eliminación o selección) obtención de resultados, descubrimiento de patrones, generalizaciones, analogías, conexión entre contextos, etc. El proceso es similar al de resolución de problemas y, más concretamente puede formar parte de la última fase del proceso de resolución de problemas.

CAPÍTULO 6: EJEMPLOS, RAZONAMIENTOS Y ANALOGÍA

6.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo se van a analizar las preguntas 2.1 y 2.2 del problema de investigación (ver Capítulo 1, apartado 1.3). Sus enunciados son los siguientes:

2. *En el desarrollo de determinados PIM, los procesos mentales más habituales que el estudiante pone en práctica son los de particularizar, generalizar, conjeturar, justificar y el uso de la analogía.*

2.1. *¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la solución del problema de investigación (que puede ser una prueba, demostración, la existencia o verificación de un resultado, etc.)?*

2.2. *¿La analogía funciona como un catalizador en los procesos de abstracción y búsqueda de generalizaciones? ¿Qué papel juega la analogía en estos procesos?*

En la búsqueda de respuestas a las cuestiones anteriores, se utilizarán:

- Uno de los PIM de la Experimentación 1, concretamente el de la estudiante del documento TN-PI-09, cuyo tema de trabajo eran las tablas numéricas con progresiones aritméticas en sus filas y columnas, que se ha comentado en el punto 4.3.1. del Capítulo 4.

- El PIM de la Experimetación 2, presentada en el Capítulo 4, apartado 4.3.2.

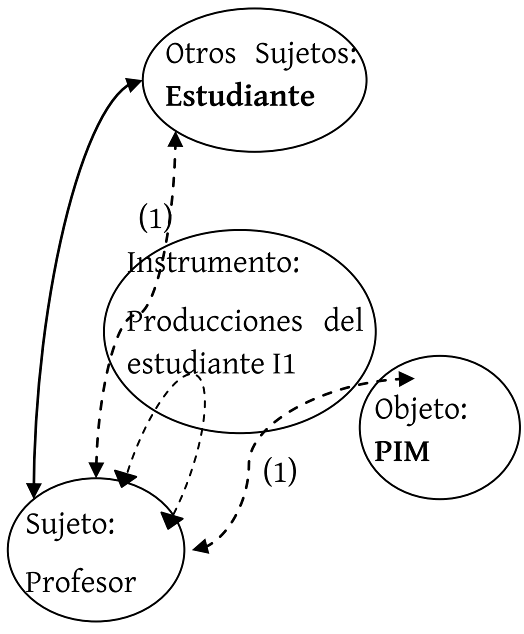


Figura 6.1. Actividades mediadas. Caso 1

En el análisis que se va a llevar a cabo, se hará uso de los conceptos especificados en una parte del marco teórico desarrollado en el capítulo 3, punto 3.6.; concretamente lo siguiente:

1. La idea de *ejemplo genérico* (Masón y Pimm, 1984; Balacheff, 1988; Harel, 2001). Un ejemplo genérico es un objeto solo, particular, que representa el caso general y con el cual puede ser percibida una generalidad (Pedemonte y Buchbinder, 2011, p. 257).

2. La *generalización de patrones* de Harel (2001). Hay dos tipos distintos de generalizaciones que corresponden a "dos maneras distintas del pensamiento'': *generalización del patrón del resultado* (*result pattern generalization)* (RPG) y *generalización del patrón del proceso* (*process pattern generalization)* (PPG). En la *generalización del patrón del proceso* (PPG) *los estudiantes se centran en las regularidades del proceso, mientras que en la generalización del patrón del resultado* (el RPG) *en las regularidades de los resultados* (p. 191). Además, como plantea

Pedemonte (2007), los PPG *son requeridos para la construcción de una demostración de tipo inductivo.*

3. Concepto de *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* (Pedemonte, 2007), (Pedemonte y Buchbinder, 2011), junto con los conceptos de *argumentación constructiva y argumentación estructurante* (Pedemonte, 2007).

4. El tipo de pensamiento utilizado en la construcción de la prueba, además de los razonamientos demostrativos inductivo y deductivo, se va tener en cuenta el razonamiento abductivo (Peirce, 1960), modelado por Polya (1954, traducción española 1966) en sus *patrones de razonamiento plausible.*

Los contenidos del marco teórico, de los cuatro párrafos anteriores, servirán para efectuar el análisis de los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la prueba.

Además de lo anterior, para el análisis del papel de la analogía en los procesos de generalización, se utilizará el marco teórico proporcionado por la *Génesis Instrumental* en su variante *Génesis Documental* dentro de las *actividades mediadas por un instrumento* de tipo documental (en este caso, el informe del estudiante), como en el capítulo anterior. El contexto específico es el Caso 1 (punto 4.2.3. del capítulo 4) que se presenta aquí en la figura 6.1. y las mediaciones que se priorizan para la identificación de los *invariantes operacionales* de los *esquemas* de los estudiantes son las mediaciones *epistémicas*.

Así mismo, los resultados esperados del análisis que se va a realizar se presentan en la tabla 6.2.

MEDIACIONES	RESULTADOS ESPERADOS
HACIA LOS ESTUDIANTES (EPISTÉMICAS)	- Valorar si un PIM puede continuarse, dando lugar a otros, generándose así una teoría matemática, con sus definiciones, propiedades, teoremas, etc. - Explicitar los invariantes operacionales (conocimientos en acción) de los esquemas contenidos en el instrumento - Conocer los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes en el desarrollo del PIM en relación con los temas planteados: ejemplos y contraejemplos, razonamientos y analogía. - Valorar el papel de los ejemplos, contraejemplos y razonamientos en la búsqueda de la prueba. - Reflexionar sobre el papel y uso de la analogía en los procesos de generalización. - Explicitar el patrón de razonamiento plausible que usan los estudiantes en el proceso de búsqueda de la prueba.

Tabla 6.2. Resultados esperados del análisis

La metodología y el contexto en el que se desarrolla la experimentación 2 se han explicado en el capítulo 4, apartado 4.3.2. Para el análisis de los episodios se han analizado los documentos que se consignan en la tabla 6.3.

TÍTULO DEL TRABAJO	DOCUMENTO	PÁGINAS REFERENCIADAS
PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN EL ESPACIO	TN-PI	Pág. 6, 7, 9, 10
GENERALIZACIÓN N-DIMENSIONAL DE PROGRESIONES NUMÉRICAS	RPA-TG	Pág. 7-8, 11, 16, 17, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29

Tabla 6.3 Documentos utilizados en la Experimentación 2

6.2. EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS EN LA BÚSQUEDA DE LA PRUEBA.

En el análisis que se llevará a cabo en el apartado se utilizará la parte del marco teórico de los *ejemplos genéricos, la generalización de patrones* en la búsqueda de la prueba y los distintos *razonamientos* que se ponen en práctica.

	74			
				186
		103		
0				

Como se recordará del capítulo 5, apartado 5.5, donde se estudiaba el caso de las "tablas numéricas", el problema inicial es el siguiente:

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con n números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

A partir de esta tarea de R.P., la estudiante desarrolla el proceso para la generación de un PIM; este proceso se ha presentado en el Capítulo 5, punto 5.5. El problema de investigación, entre otros obtenidos por la estudiante, es el siguiente:

Dados unos valores de la tabla, ¿en qué condiciones se puede completar de manera única?

El trabajo a analizar ahora es la continuación del anterior, de la misma estudiante y el documento es TN-PI. El objetivo de este PIM es la resolución del problema de investigación enunciado más arriba.

En su desarrollo tiene una parte en la que trabaja con ejemplos y contraejemplos, dando lugar a unos resultados (plasmados en el informe final) entre los que hemos elegido los episodios a analizar. En el episodio 1 se estudian algunos *ejemplos genéricos* que sirven para la construcción de demostraciones de existencia; en el episodio 2 se analiza el carácter de la información contenida en la estructura subyacente de algunos ejemplos genéricos; y en el episodio 3 se evidencian algunos razonamientos utilizados en la construcción de conjeturas modificadas a partir de otras anteriores.

6.2.1. Episodio 1. ¿Ejemplos para demostrar?

En este episodio, se van a ejemplificar varias de las ideas presentadas anteriormente. Concretamente se identificará la diferencia entre el caso particular general o abstracto, que se rige por un modo de argumentación deductivo y que, por tanto, si sirve para demostrar, y el caso particular concreto que, salvo para la construcción de contraejemplos, no sirve para demostrar.

Para ello se analizará el documento TN-PI, en la parte que intenta profundizar en una de las conjeturas más importantes del trabajo: *dados cuatro valores de la tabla, ¿siempre es posible completarla de forma única?* Concretamente se analizará Anexo 5, p. 293, donde la estudiante presenta unos casos muy interesantes, relacionados con el problema inicial. El episodio tiene varias partes y comienza de la manera siguiente:

Dados unos números a, b, c, d arbitrarios, ¿podemos construir un cuadrado de cualquier dimensión, o incluso un rectángulo, verificando que sus filas y columnas son progresiones aritméticas?

a+b	a+b+c+d
a	a+c

Fig. 15

Está claro que en esa situación (Fíg. 15) sí tiene contestación afirmativa la pregunta anterior. Además si a, b, c, d son enteros, entonces el cuadrado resulta de números enteros.

Como se puede observar, la estrategia de la estudiante ha sido construir un caso particular que dé respuesta a la pregunta planteada. Además el ejemplo planteado permite a la estudiante presentar como trivial el hecho de que si esos valores son colocados en la tabla en filas y columnas consecutivas (que pueden ser las primeras), esos cuatro elementos permiten completar, de forma única, la tabla de números en su totalidad, sin más que ir añadiendo valores en la dirección que interese y teniendo en cuenta que la diferencia de dos consecutivos es la diferencia de la progresión aritmética correspondiente. Es decir, que para dar una respuesta justificada a la pregunta: *¿podemos construir un cuadrado...?,* basta con dar un ejemplo en el que ocurra. Lo mismo pasaría para preguntas del tipo: *¿existirá algo que cumpla..?, ¿se puede dar el caso...?* Para el caso propuesto por la estudiante, se observa que ha priorizado el uso de los valores *b, c* y *d* para que formen parte de las diferencias de las p.a. filas o columnas; concretamente *b* es la diferencia de la primera columna, *c* es la de la primera fila, *c+d* de la segunda fila y *b+d* de la segunda columna de la tabla.

Volviendo al caso analizado, resulta curioso que la estudiante PI no haya resuelto la pregunta presentando la solución más sencilla, por ejemplo (Ejemplo 2A):

b	d
a	c

O mediante la solución que se obtiene a partir de la última colocación, en la que, repitiendo el procedimiento para interpolar medios aritméticos, se podría completar las filas y columnas (Ejemplo 2B) :

b	…	…	…	…	d
…					…
…					…
a	…	…	…	…	c

Por tanto, es sencillo completar una tabla de las del problema inicial si se conocen cuatro elementos como los anteriores, situados en dos filas y dos columnas consecutivas, como en el primer ejemplo, o no consecutivas, como se ha propuesto en el último.

Volviendo al desarrollo de la estudiante, se puede ver que ha demostrado el siguiente resultado: dados cuatro números cualesquiera, siempre podemos construir una tabla, de manera que los valores formen parte de ella y todas sus filas y columnas sean p.a. Además, la construcción permite asegurar que la tabla resultado no es única, sino que depende de las posiciones de los cuatro valores en la tabla; para cada posición elegida existirá una tabla como resultado.

Profundizando en el análisis de las características de los ejemplos anteriores, se puede ver que no se pueden encuadrar completamente en la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001), ya que, aunque tienen algunas coincidencias con ellos, también mantienen varias diferencias:

a) Ejemplifican una estructura general, abstracta, pero esa idea no está subyacente como en los *ejemplos genéricos* sino que aparece explícita en los ejemplos.

b) No conectan el dominio aritmético con el algebraico, sino que se mantienen en este último.

c) Tienen un carácter ambivalente. Son casos particulares de la tabla de números, pero no son ejemplos concretos, sino que representan una familia de casos (uno para cada cuarteto de valores de a, b, c, d. Ciñéndose al contexto: *lugares que ocupan los elementos en la tabla* o *posiciones de los elementos en la tabla,* si se toma esta variable como criterio, entonces son casos particulares o *ejemplos genéricos;* pero en el contexto: *valores numéricos de los elementos de la tabla,* para este criterio, son casos generales, no son ejemplos concretos ni *genéricos.*

Se tiene, por tanto, que son ejemplos particulares y generales a la vez, según el contexto en el que los situemos y el criterio con el que los analicemos. Surgen de este modo un tipo de ejemplos genéricos nuevos que denominaremos *ejemplo (o caso particular) de tipo general y genérico* (se amplía esta idea en el Episodio 3). Son casos particulares de una situación general, pero, a su vez, son casos generales de una idea más concreta; siempre expresarán explícitamente una idea abstracta y, por tanto, englobarán otros casos particulares que lo pueden concretar.

Una de las características de los tres *ejemplos de tipo general y genérico* vistos en el episodio, es que configuran sendas demostraciones de existencia por construcción; es decir, que sirven para demostrar la veracidad de la conjetura planteada, a semejanza de lo que ocurre con los *ejemplos genéricos.*

Por otra parte, los tres ejemplos analizados representan sendos ejemplos de una *Generalización del Patrón de Proceso* (PPG) (Harel; 2001). En los tres casos que se están analizando, para completar la tabla a partir de los cuatro elementos conocidos, se debe encontrar una idea procesual que permita ir generando los restantes elementos a partir de los elementos dados inicialmente. Esta idea es encontrada por la estudiante al centrar su búsqueda en el cálculo de las diferencias de cada una de las p.a. que componen las líneas (filas o columnas). Como de cada una de ellas conoce dos elementos, la cuestión es trivial. Es tan sencilla que la estudiante, una vez presentado el ejemplo, da por hecho que se puede completar la tabla y ni siquiera lo menciona.

Otra característica del proceso llevado a cabo por la estudiante es que podemos observar varias de las ideas propuestas por Pedemonte y Buchbinder (2011):

a) *Unidad cognoscitiva*. En el caso analizado, el ejemplo planteado por la estudiante es de tipo general (lo que se ha denominado *caso particular general genérico*) y sirve para la construcción de la prueba, (él mismo es parte esencial en la construcción de la conjetura y en su justificación).

b) *Continuidad estructural*. En el caso de la demostración de la estudiante, la argumentación y la prueba son de tipo deductivo (concretamente de existencia por construcción). En ellas, la construcción de un ejemplo sirve de argumentación estructurante para hacer verdadera la conjetura.

6.2.2. Episodio 2. La información contenida en la estructura subyacente de los ejemplos genéricos

Continuando con el análisis del trabajo de la estudiante, en el documento TN-PI (Anexo 4, p. 294), se puede leer:

> *Podemos poner cualquier valor con tal de que no sean redundantes o insuficientes, como por ejemplo:*
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | | | | |
> | *2* | *4* | *6* | *8* |
>
> *Si nos dan estos cuatro valores, situados en la misma fila, no podríamos obtener el cuadrado [una tabla única], pues en definitiva sólo nos han dado dos valores independientes.*

Como se puede ver, el refinamiento en la selección de ejemplos permite conseguir resultados interesantes: *las posiciones de los valores en la tabla condicionan la existencia o no de una tabla única a la que ellos pertenezcan.* Es un caso particular concreto (se denominará Ejemplo 3); es decir, un *ejemplo genérico* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001) ya que lo realmente importante de él no son los valores numéricos particulares, sino la situación de ellos en la tabla; es decir, que contienen una *estructura subyacente* (la idea general o abstracta de la que el ejemplo es un caso particular) que es la siguiente: se tienen cuatro elementos consecutivos de una misma línea. Este ejemplo genérico, a modo de contraejemplo, sirve para demostrar la falsedad de la conjetura: *dados cuatro elementos cualesquiera de la tabla, siempre se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.*

Resulta muy ilustrativo el uso que hace la estudiante de las ideas de *valores redundantes, insuficientes o contradictorios;* es decir, para completar de forma única una línea de la tabla, basta con conocer dos elementos cualesquiera de ella. Conocer más de dos implica que hay información redundante o contradictoria, conocer menos de dos significa que la información es insuficiente (para completar de forma única).

Por esta causa, en el ejemplo genérico anterior, se observa que la información es redundante; es decir, se pueden considerar dos cualesquiera de los elementos dados *independientes* y los demás se pueden deducir de esos dos. Esta idea general o *estructura subyacente,* descubierta por la estudiante en el ejemplo, es la que sirve para argumentar y demostrar que, en los casos análogos a ese, se puede completar la tabla, pero no de forma única. Todo ello refuerza la importancia de los ejemplos genéricos.

La importancia de un ejemplo genérico proviene de su capacidad de conectar los dominios aritméticos y algebraicos. Esta conexión apoya la unidad cognoscitiva porque un ejemplo usado en la argumentación se puede generalizar a través de la representación algebraica en la prueba. Esto es porque las reglas usadas para los ejemplos, y particularmente para los ejemplos genéricos, se pueden generalizar en el dominio algebraico.

De ahí que parezca natural empezar a pensar que los elementos deban estar en filas y columnas diferentes, para ver si así son *independientes* y permiten completar la tabla de forma única, como ocurría en el problema inicial. Esta es la idea que se resalta en el siguiente episodio, desarrollado en las tres semanas siguientes.

6.2.3. Episodio 3. El papel de la modificación de conjeturas en los razonamientos

Por todo lo anterior, P.I. modifica la conjetura y la transforma en la siguiente: sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.

Como la demostración de esta conjetura conlleva unas *formas de expresión* que se salen del *alcance conceptual* de la estudiante, vuelve a tomar un caso particular general de la misma, para ver si obtiene algún resultado interesante. Ello aparece en las páginas del documento TN-PI (Anexo 4, p. 297):

Vamos a tratar una variante del problema, de forma general: Si tenemos cuatro elementos conocidos, situados como en la figura siguiente, ¿hay solución para el cuadro aritmético?

			d
		c	
	b		
a			

Tenemos que demostrar que existen las diferencias v_1, v_2, h_1 de las correspondientes p.a. fila [fila primera:

h_1] o p.a. columnas [columnas primera: v_1; columna segunda: v_2].

Se cumple que las diferencias de las filas son: h_1, h_1+(v_2-v_1), h_1+2(v_2-v_1), h_1+3(v_2-v_1).

[Podemos poner $h_2 = h_1 + (v_2 - v_1)$ pues se cumple que $b=a+h_1+v_2 = a+v_1+h_2$, simplificando se tiene $h_1+v_2=h_2+v_1$ o lo que igual: $h_2 - h_1 = v_2 - v_1$. Por tanto $v_2-v_1=h_2-h_1$. Luego $h_2 = h_1+(v_2 - v_1) = h_1+(h_2 - h_1)=h_2$] (Este párrafo aparece como una nota a pie de página en el original)

Además: $a + v_2 + h_1 = b$; $a+2v_1+2(h_1+2(v_2-v_1))=c$; $a + 3v_1 + 3(h_1 + 3(v_2 - v_1)) = d$. Operando y ordenando tenemos:

$h_1 + v_2 = b - a$; $h_1 - 2v_1 + 4v_2 = c - a$; $3h_1 - 6v_1 + 9v_2 = d - a$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Analicemos el rango de la matriz del sistema y la ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 2 & -2 & 4 & c-a \\ 3 & -6 & 9 & d-a \end{pmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & 2 & c-2b+a \\ 0 & 0 & 0 & d-3b+2a-3(c-2b+a) \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema no tendrá solución si

$$d - 3b + 2a - 3c + 6b - 3a = -a + 3b - 3c + d \neq 0$$

O lo que es lo mismo $a + 3c \neq d + 3b$ *Vamos a presentar un ejemplo de cada situación. [...]*

El planteamiento de fondo de la estudiante en este episodio es un intento más de contrastar la veracidad o no de la conjetura enunciada al principio de este episodio: *sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a*. Para ello analiza otro *caso particular general* (lo denominaremos como Ejemplo 4) y, si el resultado es el adecuado, lo utiliza posteriormente para refutar la conjetura.

Sin parar a comentar la originalidad del planteamiento de la estudiante, que se apoya en varias incógnitas auxiliares no explícitas en el enunciado del problema, se puede observar cómo P.I., a partir de este *caso particular general*, presenta (Anexo 4, p. 297-298), dos casos particulares o ejemplos concretos, aparentemente parecidos, uno de ellos (para a=1, b=2, c=3, d=4) con varias soluciones, de las que presenta dos (ejemplos 5 y 6), y el otro sin solución (para a=1, b=2, c=4, d=3) (Ejemplo 7):

			4
		3	
	[illegible]		

Ejemplo 4

7	6	5	4
5	4	3	2
3	2	1	0

Ejemplo 5

22	16	10	4
15	9	3	-3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ejemplo 6

			3
		4	
	[illegible]		

Ejemplo 7

Estos resultados permiten a P.I. demostrar la falsedad de una de las conjeturas principales del trabajo: *si tenemos cuatro valores conocidos de una tabla, situados en diferentes filas y columnas* (es decir, que tomados dos cualesquiera de ellos no están ni en la misma fila ni en la misma columna) *entonces podemos completar la tabla de forma única,* como en el problema inicial. Además, demuestra que las tablas análogas a la de los datos *a, b, c, d*, o no tienen solución o, si la tienen, ésta no es única.

Volviendo a la demostración, se ve que la estudiante vuelve a utilizar, como en el Episodio 1, la Generalización de Patrones de Proceso (PPG) (Pedemonte; 2007) que *son requeridos para la construcción de la demostración* de una conjetura que resulta al generalizar un propiedad que se da en ejemplos numéricos. En este caso los *patrones de proceso* son:

- Las diferencias de la p.a. filas o columnas, que juegan un papel muy importante en la demostración, por un lado porque son los valores a determinar y, por otro porque son los que permiten generar elementos en la tabla, de manera gradual y sin contradicciones.

- Las propiedades que relacionan las diferencias de las p.a. filas y las p.a. columnas. Téngase en cuenta que la sucesión de diferencias de las filas (h_i) y la sucesión de las diferencias de las columnas (v_i) forman, respectivamente, nuevas p.a. con la peculiaridad de tener la misma diferencia (h_i-h_{i-1}=v_i-v_{i-1})

Estos patrones son los que permiten a la estudiante construir una demostración deductiva, de carácter algebraico, que termina con la discusión de la naturaleza de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que puede ser de cualquier tipo excepto compatible determinado. Ella lo ejemplifica con un ejemplo concreto de cada tipo (que aparecen más arriba: ejemplos 5, 6 y 7).

Así mismo ocurre que la *argumentación estructurante* (la que justifica la conjetura basándose en los patrones de proceso) y la prueba (basada en el uso del lenguaje de tipo algebraico):

a) tienen la misma estructura lógica, (cadena de razonamientos de tipo deductivo);

b) conservan una continuidad en los contenidos (los ejemplos generales genéricos que han permitido generalizar y construir la prueba) Todo ello permite observar (Pedemonte y Buchbinder; 2011) la *continuidad estructural.*

6.2.4. Discusión conjunta de los episodios. Primeros resultados

Prosiguiendo el análisis, se presenta a continuación la discusión conjunta de los tres episodios, lo que ha permitido la identificación de algunas ideas nuevas que complementan el marco teórico, además de dar respuesta a la pregunta 2.1. del problema de investigación, cuyo enunciado es:

> *¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la solución del problema de investigación (que puede ser una prueba, demostración, la existencia o verificación de un resultado)?*

En primer lugar, si se recopilan las conjeturas que han ido apareciendo en los tres episodios, se obtienen las siguientes:

C0: Dados cuatro valores cualesquiera situados en la tabla, siempre es posible completarla de forma única, de manera que sus filas y sus columnas formen p.a..

C1: Dados cuatro valores de la tabla, situados en una misma línea (fila o columna), se puede completar la tabla de forma única.

C2: Dados cuatro valores conocidos de la tabla, por ejemplo los siguientes: $a_{i,j}$, $a_{i+p,j}$, $a_{i,j+q}$, $a_{i+p,j+q,}$ (siendo i, i+p las filas i-ésima e (i+p)-ésima; j, j+q las columnas j-ésima y (j+q)-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.

C2.1: Dados cuatro valores de la tabla, $a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1,}$ (siendo i la fila i-ésima y j la columna j-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.

C3: Si se conocen cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos están en filas y columnas diferentes; en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.

C3.1: Dada la tabla con elementos conocidos:

$$a = a_{i,j},\ \ b = a_{i+1,j+1},\ \ c = a_{i+2,j+2},\ \ d =\ a_{i+3,j+3}$$

(colocados respectivamente en filas y columnas consecutivas); en estas condiciones, se puede completar la tabla de forma única.

C3.1.1: Con las condiciones de C3.1, si a=1, b=2, c=3, d=4, entonces la tabla se puede completar de más de una manera. Si a=1, b=2, c=4, d=3, entonces la tabla no se puede completar.

C3.2: El problema inicial tiene solución.

Para visualizar las conexiones existentes entre las conjeturas anteriores, en relación con el problema, se ha elaborado la figura 6.4, en la que se sitúan todas ellas. Con el fin de resaltar la dificultad de la conjetura C3, ésta se ha representado por un polígono cóncavo con muchos lados, en forma de estrella con muchas puntas. Las demás conjeturas se han presentado por medio de polígonos regulares convexos, para denotar que son más manejables, o por circunferencias, para denotar que ya está están verificadas o refutadas.

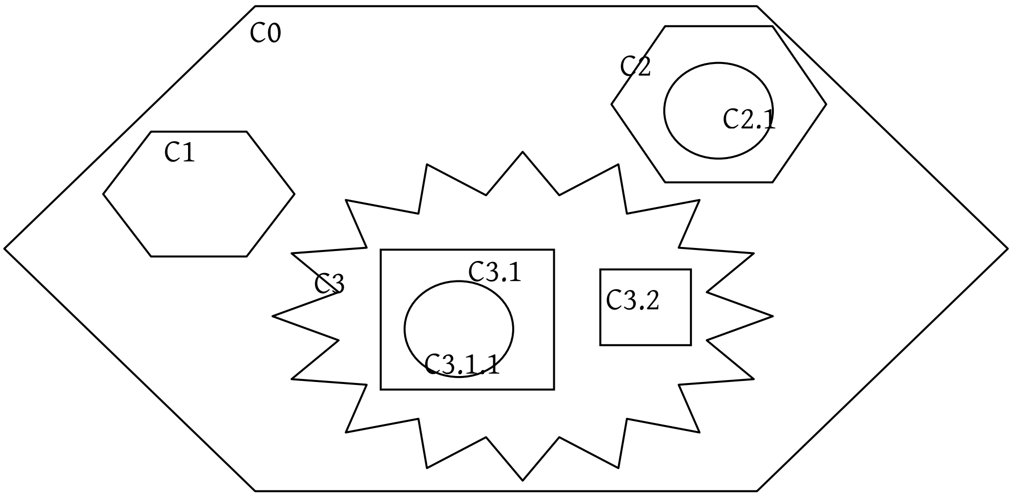


Figura 6.4. Representación de las conjeturas

Como se puede observar en la Figura 6.4 y en los anteriores enunciados, las conjeturas C1, C2 y C3 son casos particulares de tipo general de la conjetura C0; la conjetura C2.1 es un caso particular de tipo general de C2; las conjeturas C3.1 y C3.2 son casos particulares, de tipo general y concreto respectivamente, de la conjetura C3, y la conjetura C3.1.1 es un caso particular concreto de la C3.1.

Por tanto, se tiene que la falsedad de C1 sirve como contraejemplo (ya que es un caso particular) para demostrar la falsedad de C0, pero la veracidad de C2 lleva a pensar en la posibilidad de que C0 pueda dar lugar a una conjetura cierta modificando alguna de sus condiciones.

Por otra parte, la veracidad de C3.1.1 como contraejemplo (caso particular concreto) lleva a la falsedad de C3.1 y la falsedad de esta última sirve de contraejemplo, como caso particular general, para demostrar la falsedad de C3.

Se tiene que C3 es falsa. A su vez, la existencia de solución en el problema inicial es equivalente a que C3.2 es verdadera. En estas condiciones, a partir de C3.2 se podría intentar construir una nueva conjetura C que verificara $C \Rightarrow C3.2$, de forma que, utilizando el razonamiento abductivo (Peirce, 1960), modelado en forma de *razonamiento plausible* y denominado *patrón fundamental inductivo* (Polya, 1954 y 1966 (traducción española)) en la forma:

$$C \Rightarrow C3.2$$

C3.2 es verdadera

C es más digna de crédito

Por tanto, el análisis efectuado con las conjeturas confirma la importancia de los ejemplos en el proceso de elaboración de conjeturas y en el de construcción de la prueba (pregunta 2.1. de la investigación).

En segundo lugar, se ha podido comprobar que los niveles de concreción o de generalidad de un ejemplo pueden jugar un importante papel a la hora de plantear argumentos válidos y evidencias completas en la construcción de conjeturas y en su demostración. Esos niveles de concreción o de generalidad vienen dados y están condicionados por el contexto y el criterio elegido a la hora de plantear el ejemplo. En el caso estudiado, permite asegurar la existencia de ejemplos genéricos no contemplados hasta ahora. Se propone una categorización de los ejemplos, en la Fig. 6.5., intentando englobar a todos ellos:

$$\textit{Ejemplos o Casos particulares} \begin{cases} \textit{Concretos} \begin{cases} \textit{No genéricos } (ECNG) \\ \\ \textit{Genéricos } (ECG) \end{cases} \\ \\ \textit{Generales} \begin{cases} \textit{No genéricos } (EGNG) \\ \\ \textit{Genéricos } (EGG) \end{cases} \end{cases}$$

Figura 6.5 Tipología de ejemplos o casos particulares

Una vez fijado el contexto o contextos en los que se van a construir los ejemplos y el criterio/s o aspecto/s que se van a valorar, se puede señalar que la diferencia entre concretos y generales radica en que los primeros vienen dados mediante valores concretos del aspecto/s a valorar (valores o coeficientes numéricos, etc.) y los segundos por valores abstractos de alguno de los criterios que se valoran (con valores literales); cada ejemplo general representa a una familia de ejemplos concretos que obtenemos al dar valores a los elementos del ejemplo general. Por otra parte, recordando que la diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que se puede observar si se dejan a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa.

En el problema inicial que origina el trabajo de la estudiante, se pueden considerar al menos dos criterios a la hora de construir ejemplos: *valores de los elementos de la tabla* y *posiciones de los elementos en la tabla*. Se tienen varias posibilidades a la hora de construir ejemplos:

4	2		

Ejemplo A

1			
			4
	2		

Ejemplo B

c	d		

Ejemplo C

a			
			d
	b		

Ejemplo D

En la Tabla 6.6. se clasifican estos ejemplos, en función del criterio o el contexto elegido.

CRITERIO O CONTEXTO	EJEMPLO A	EJEMPLO B	EJEMPLO C	EJEMPLO D
POSICIONES DE LOS ELEMENTOS EN LA TABLA.	ECG	ECNG	ECG	ECNG
VALORES DE LOS ELEMENTOS DE LA TABLA	ECG	ECNG	EGG	EGNG

Tabla 6.6 Clasificación de los ejemplos A, B, C, D

Las anteriores ideas, sobre la naturaleza de los ejemplos, completan el marco teórico descrito inicialmente con la idea de *ejemplo genérico general*, en un contexto en el que haya varios criterios de clasificación, en el que los ejemplos pueden tener un carácter ambivalente. También proporcionan una posible respuesta a la pregunta 2.1. de investigación profundizando en la importancia del papel de los ejemplos en la construcción de la prueba.

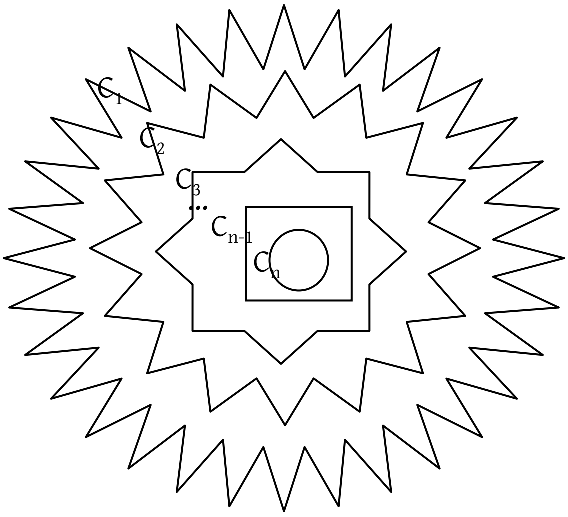


Figura 6.7. Representación de conjeturas

En cuanto a la *práctica de aula, e*n primer lugar, el profesor, a la hora de plantearse procesos de demostración a partir de conjeturas propiciadas por ejemplos, debe tener en cuenta algunas reglas de lógica demostrativa:

1. Todo ejemplo (concreto o general) puede ser usado como un contraejemplo para demostrar la falsedad de una conjetura que implique ese caso particular. Téngase en cuenta, como aparece en Stylianides y Ball (2008), que esto equivale a la utilización de la regla lógica de contraposición.

2. Un ejemplo concreto puede ser usado como contraejemplo para demostrar la falsedad de un ejemplo general.

3. En el trabajo con conjeturas se debe tener en cuenta, cuando aparezca, el siguiente patrón de razonamiento demostrativo que se presenta a continuación:

Sean C_1, C_2, ..., C_{n-1} conjeturas en las que cada una (excepto la primera) es un caso particular de la anterior (véase la Figura 6.7 en la que se representan las conjeturas por polígonos cóncavos, hasta llegar a un polígono convexo, que representa una conjetura más manejable y, finalmente una circunferencia, que representan la conjetura que se ha podido demostrar o refutar). Es decir, C_i es un caso particular de C_{i-1}, para i=n-1, n-2, ..., 2; o dicho de otra manera, $C_i \Rightarrow C_{i+1}\ , \forall i = 1, 2, \dots, n-1$. En estas condiciones, si C_n es un contraejemplo (caso particular general o concreto) que demuestra la falsedad de C_{n-1}, entonces también son falsas todas las conjeturas C_i, i=1, 2, ..., n-1.

El silogismo anterior es un razonamiento lógico (ya conocido) que, usado en un contexto de ejemplos, adquiere mucho valor, porque sirve para demostrar resultados de existencia o para refutar, si los ejemplos los usamos como contraejemplos. Pero es posible porque estos ejemplos en un contexto son concretos (y sirven para demostrar, por refutación, como contraejemplos en razonamientos empíricos) y en otro contexto son generales (y sirven para demostrar dentro de razonamientos deductivos).

Por tanto, el profesor necesita conocer las reglas básicas de la lógica de proposiciones, y estos conocimientos formarán parte del acervo de conocimientos de contenido. Pero, además de lo anterior, cuando la situación a analizar sea rica en posibilidades, puede ocurrir que aparezcan nuevas ideas como se va a mostrar a continuación.

4. En el análisis llevado a cabo se ha identificado un patrón de razonamiento plausible (Polya, 1966, p. 281-341), que constituye una variante del presentado por Polya (1966) y que se puede enunciar de la siguiente manera:

Sean C, C_1, C_2, ..., C_n conjeturas, de tal forma que se cumple que $C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \dots, n$. Supongamos que C_1 es falsa y que C_2, C_3, ..., C_n son verdaderas. Construimos otra conjetura D, modificando las condiciones de C, acercándolas a las de alguna de las $C_i\ ,\ i = 2, \dots, n$; de forma que $D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$. Con estas condiciones, se cumple que C es falsa y D es un poco (o mucho) más digna de crédito, en función de las semejanzas (o diferencias) que existan entre C_2, C_3, ..., C_n. Este patrón, por analogía con el de Polya (1966, pág. 285), añade una cualificación al patrón fundamental inductivo. Este razonamiento abductivo (Peirce, 1960) lo podemos modelar de manera análoga a como hace Polya (1954, 1966(traducción española)) en sus patrones de razonamiento plausible:

$$C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \dots, n$$
$$C_1 \text{ es falsa}$$
$$C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n \text{ son verdaderas y semejantes (ó diferentes) entre sí}$$
$$D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$$

C es falsa y D es más (ó mucho más) digna de crédito

Volviendo al patrón de razonamiento planteado anteriormente, merece la pena profundizar en él, analizando una situación similar a ella en otro contexto, concretamente en el de las situaciones de trabajo matemático consistentes en la búsqueda de la demostración de un teorema que tenga forma de implicación (si... entonces....). En este contexto, se parte de la/las hipótesis del enunciado que se asumen verdaderas, y se quiere demostrar la tesis, que también es verdadera (en caso contrario no sería un teorema). Para este caso tenemos la situación siguiente:

Sea H la hipótesis de un teorema y T su tesis. Sean T_1, T_2, ..., T_n resultados obtenidos a partir de H, de tal forma que se cumple que $H \Rightarrow T_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos que el resultado T_1 es falso y que T_2, T_3, ..., T_n son verdaderos. Construimos otro resultado R, a partir de la modificación de T_1 acercándolo a la tesis del teorema T, o a alguno de los T_i, $i = 2, \ldots, n$, de forma que $H \Rightarrow R$, con R verdadero. Con estas condiciones, como H es verdadera, alguno de los razonamientos empleados en la implicación $H \Rightarrow T_1$ debe ser falso y se cumple que la implicación $H \Rightarrow T_1$ es falsa. Además, por el patrón de fundamental inductivo de Polya, T está más cerca (mucho más cerca) de ser conseguida, en función de las diferencias (o similitudes) entre R y T.

El modelado de este razonamiento podría ser el siguiente:

$$H \Rightarrow T_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
$$T_1 \text{ es falso y } T_i, \forall i = 2, 3, \ldots, n \text{ son verdaderos}$$
$$H \Rightarrow R \text{ y } R \text{ es verdadera}$$
$$R \text{ es distinta (o similar) a T}$$

$$H \Rightarrow T_1 \text{ es falsa y T está más cerca (o mucho más cerca) de ser conseguida}$$

Como se puede ver, cada uno de los planteamientos ilustra un camino a tomar en la situación inicial:

La propuesta primera focaliza la atención en la modificación de la conjetura C (ya que es falsa por serlo C_1). Una vez modificada C, obteniendo D, como $D \Rightarrow C_i, \forall i = 2, 3, \ldots, n$, aplicando el patrón fundamental inductivo de Polya, tenemos que D es más digna (mucho más digna) de crédito, en función de las diferencias entre las $C_i, \forall i = 2, 3, \ldots, n$. Por eso decimos que la propuesta de la tesis añade una cualificación al patrón fundamental inductivo de Polya.

La segunda situación plantea, sin modificar H (que no se puede modificar por ser las hipótesis de un teorema cierto), la modificación del resultado falso T_1 obteniendo uno nuevo R que es verdadero. Entonces se tiene que $H \Rightarrow T_i, \forall i = 2, \ldots, n$ y $H \Rightarrow R$. Aplicando el patrón fundamental inductivo de Polya, tenemos que T está más cerca (o mucho más cerca) de ser conseguida, en función de las diferencias y similitudes de R con T.
Las dos propuestas pueden ser útiles y eficaces, dependiendo de la meta a conseguir:

- Si H es la hipótesis de un teorema, dado desde el principio, y la meta del proceso es demostrar la veracidad de $H \Rightarrow T$, entonces hay que utilizar el patrón de razonamiento segundo; es decir, modificar el resultado falso y/o el proceso de obtención del mismo, sin modificar H.

- Si, en cambio, C es una conjetura (que no está fija y que no se ha podido probar su veracidad) y el proceso comprende la construcción de C y la demostración de su veracidad, entonces el camino mejor es la propuesta primera; es decir, modificar C de forma que todas las conjeturas derivadas de ella sean verdaderas.

Como la situación que se presenta en la tesis es de construcción y demostración de una determinada propiedad (también se podría llegar a denominar, al final del proceso, teorema), es más eficaz la propuesta primera. Esto no quita ningún valor a la propuesta segunda; al contrario, el contraponerlas en paralelo, las enriquece mutuamente.

Por tanto, el análisis realizado ha permitido identificar una variante de uno de los patrones de razonamiento plausible de Polya, lo que permite ampliar el marco teórico, obteniendo un primer resultado para la tercera pregunta de investigación planteada, que versa sobre los conocimientos del profesor:

> *¿Pueden modificarse los conocimientos del profesor en el análisis de un PIM? ¿Qué tipo de modificaciones se pueden producir?*

Es decir, que el análisis de las producciones de los estudiantes provoca interacciones con los conocimientos del profesor (de *contenido* matemático y *didácticos del contenido* matemático), a través de las mediaciones *heurísticas* entre el profesor (*sujeto* de la actividad) y el instrumento (los documentos-informes del estudiante. Este tipo de interacciones se estudiarán minuciosamente en el Capítulo 8 de la tesis.

Por otra parte, en el proceso de demostración de conjeturas se ha observado que:

5. Los ejemplos pueden ser concretos o generales, genéricos o no genéricos, en función del contexto o del criterio con el que los construyamos. Un ejemplo puede ser concreto en un contexto y general en otro.

6. El análisis refuerza las ideas de Masón y Pimm (1984), Balacheff (1988) y Harel (2001): los ejemplos genéricos son eficaces para la generalización de patrones de proceso y pueden contribuir a que las argumentaciones constructiva y estructurante tengan la misma estructura y utilicen los mismos contenidos que la prueba, lo que permite observar unidad cognoscitiva y continuidad estructural en el proceso de construcción y justificación de la conjetura.

Así mismo, de los resultados esperados del análisis hecho sobre el papel de los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la prueba, que aparecen al inicio de este Capítulo, en la tabla 6.2, se han conseguido satisfactoriamente.

Para finalizar, señalar que el análisis conjunto de los episodios ha recalcado el importante y complejo papel que juegan los ejemplos y contraejemplos en el proceso de resolución del problema de investigación de un PIM (pregunta 2.1 del problema de investigación).

6.3. LA EXPERIMETACIÓN 2. LA ANALOGÍA COMO CATALIZADOR DE LAS GENERALIZACIONES

En el análisis que ahora comienza, se ajustará a la parte del marco teórico de las mediaciones, en este caso epistémicas, desarrolladas en el Capítulo 4 y reseñadas al principio de este capítulo, en la presentación.

El PIM que se va a analizar es un proyecto llevado a cabo por 5 estudiantes de manera conjunta. El tema de trabajo de este PIM es el mismo que el analizado en el punto 6.2 anterior, siendo una continuación de este último (realizado por una estudiante el curso anterior). El documento para el análisis es el RPA-TG.

6.3.1. Punto de partida.

Comenzaremos presentando lo que en el documento RPA-TG se denomina Punto de partida. En este apartado, los estudiantes presentan las ideas que les sirvieron de base para el trabajo posterior:

1. El trabajo TN-PI realizado por la estudiante P.I. el curso anterior, conocido por ellos. Este trabajo es uno de los casos analizados en el capítulo 5, apartado 5.5. y en una de sus páginas, concretamente (Anexo 4, p. 294), presenta y dice lo siguiente:

Estos "cuadrados aritméticos" son unas figuras en el plano (espacio bidimensional) que tienen sus análogas en la recta (espacio unidimensional) y en el espacio tridimensional. Vamos a exponerlo de una manera gráfica:

Dado el siguiente cuadrado aritmético (fig. 16), la análoga en la recta es la progresión aritmética tradicional (figura 17) y en el espacio es el paralelepípedo aritmético (figura 17 bis).

y	t	
x	z	

Fig. 16: cuadrado aritmético

…•…………………………………………………•…………

x *y*

Fig. 17: recta aritmética

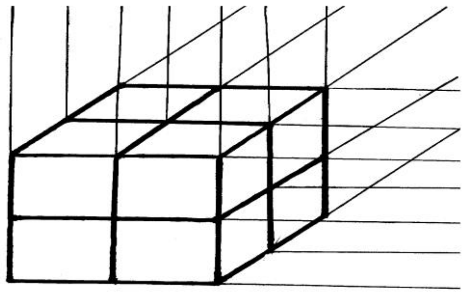


Fig 17 bis: paralelepípedo aritmético

La figura análoga al cuadro aritmético, en el espacio tridimensional, sería el "cubo, o paralelepípedo aritmético", que sería una red de cubitos, y en cada celdilla habría un número. El número mínimo de cubitos que habrían de darnos para completar el cubo aritmético parece que debería ser ocho, por analogía con el plano y la recta, pero esto es una conjetura.

Llegados a este punto, también nos preguntamos si todo lo dicho para progresiones aritméticas serviría para progresiones geométricas, para lo que deberíamos cambiar las sumas por multiplicaciones, las restas por divisiones y los productos por potencias.

Como puede observarse, la estudiante emplea la palabra *análoga* varias veces para establecer relaciones y conexiones entre las figuras en cada espacio. Es decir, la relación que une unas figuras con otras es la relación de analogía; es decir, son la misma idea si nos olvidamos del contexto en el que se sitúa cada una (los espacios unidimensional, bidimensional, etc.). En el trabajo queda claro (las negrillas se han puesto para resaltar) :

> *La figura **análoga** al cuadro aritmético, en el espacio tridimensional, sería el "cubo, o paralelepípedo aritmético"*
>
> *Estos "cuadrados aritméticos" son unas figuras en el plano (espacio bidimensional) que tienen sus **análogas** en la recta (espacio unidimensional) y en el espacio tridimensional*
>
> *El número mínimo de cubitos que habrían de darnos para completar el cubo aritmético parece que debería ser ocho, por **analogía** con el plano y la recta, pero esto es una conjetura.*

Por tanto, ya se observa que en el primer PIM sobre el tema, ya aparece la idea del uso de la analogía para explicar y, hasta cierto punto justificar, determinadas ideas más generales.

Este documento era conocido por los estudiantes del trabajo en grupo antes de comenzar el suyo. Por tanto, ellos participaban de todas estas ideas, aunque buscaban formalizarlas y avanzar en el encuentro de nuevos resultados que fortalecieran las ideas, hasta cierto punto no formales, de la primera estudiante.

2. El problema inicial del trabajo TN-PI realizado por la estudiante P.I. el curso anterior, conocido por ellos. El problema se presentó en el Capítulo 5 y en el apartado 6.2 de este Capítulo; no obstante se vuelve a presentar en la fig. 6.8.

	74			
				186
		103		
0				

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con n números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

Figura 6.8. Problema inicial

3. Un problema de la Olimpiada de Matemáticas del año 2004, que trata también de tablas numéricas, planteando una pregunta relacionada con la suma de todos los elementos de una tabla de esas características. Su enunciado aparece en el documento RPA-TG, Anexo 6, pág. 357:

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Este problema va a jugar un importante papel a la hora de plantearse la pregunta de cómo se podría calcular la suma de todos los elementos de una tabla numérica de ese tipo.

4. Aunque no figura en el Punto de partida, en RPA-TG, anexo 6, p. 361, al comienzo del apartado Resultados, comienzan diciendo que dan por conocidas varias ideas del trabajo de la estudiante P.I., mencionado anteriormente:

En este apartado vamos a dar por conocidos los conceptos de red aritmética bidimensional (RA2D), los conceptos análogos de RA3D y RAND, así como el concepto de Diferencia de Priscila de una red aritmética…

Las conceptos aludidos, *red aritmética bidimensional (RA2D), RA3D y RAND* son los del trabajo TN-PI, Anexo 4, que se presentan para que, aunque no tienen interés en el contexto actual, el lector pueda valorar el nivel de precisión y formalismo que despliega la estudiante para definir esas ideas conceptuales. Para una mejor comprensión, hay que señalar que los estudiantes del trabajo en grupo denominan RA2D y RA3D a lo que la estudiante llama respectivamente RAB y RAT:

-Red Aritmética Bidimensional de n filas y m columnas(nxm)

Denominamos Red Aritmética Bidimensional (RAB) de n filas y m columnas (nxm) a un cuadro de números de la forma $\begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nm} \\ \dots & & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix}$ *donde los elementos de cada fila y de cada columna son progresiones* *aritméticas. También lo escribiremos de la forma siguiente:* $(a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$

Al conjunto de todas las RAB de n filas y m columnas lo denotaremos por R(n x m)

-Red Aritmética Tridimensional de dimensiones (nxmxp)

Una Red Aritmética Tridimensional de dimensiones (nxmxp) (R.A.T.) es todo "paralelepípedo" de números (a_{ijk}) *donde* $i \in \{1,2,...,n\}$ $j \in \{1,2,...,m\}$ $k \in \{1,2,...,p\}$ *de tal manera que si fijamos i, j y variamos k, obtenemos una progresión aritmética. Análogamente, si fijáramos dos cualesquiera y variásemos la tercera que queda, pasaría lo mismo.*

Al conjunto de todas las redes aritméticas de dimensiones nxmxp lo denotaremos por R(nxmxp)

-Red Aritmética N-dimensional $(n_1xn_2x\dots n_n)$

Llamaremos así a todo "hiperparalelepípedo" de números $a_{i,j,\dots,k}$, *donde i toma valores naturales entre 1 y* n_1*; j entre 1 y* n_2*; …, k entre 1 y* n_n*, de tal forma que si fijamos todos los valores i, j, …, k, excepto uno de ellos: p, los términos correspondientes forman una p.a. A esta red aritmética de dimensiones* $(n_1xn_2x\dots n_N)$ *la denotamos por RAND*$(n_1, n_2, \dots n_N)$.

-Red Aritmética Unidimensional

Una Red Aritmética Unidimensional de n términos (R.A.U.) es cualquier sucesión de números $a_1, a_2, ..., a_n$ *que formen progresión aritmética. También la escribiremos* $(a_i)_{1\le i\le n}$

Al conjunto de todas las RAU de n elementos lo denotaremos por R(n)

-Progresión aritmética fila de una R.A.B. nxm

Progresión aritmética fila de una R.A.B. nxm es cualquier progresión aritmética de elementos de la red que están todos en la misma fila. Las denotaremos por p.a.f. De manera análoga definimos progresión aritmética columna (p.a.c.)

Como puede verse, la estudiante define:

> *Red Aritmética Unidimensional de n términos (R.A.U.) es cualquier sucesión de números* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *, que formen progresión aritmética.*

Por lo tanto, las definiciones anteriores son una formalización de las figuras que había planteado anteriormente. En este contexto las p.a. serían un caso particular de *redes.*

Por otra parte, también dan por conocida la que denominan *Diferencia de Priscila de una red aritmética,* que se explica a continuación. Priscila es la estudiante autora del trabajo TN-PI, Anexo 4, p. 305 define lo que ella denomina *Número de Priscila asociado a una Red Aritmética:*

4.4. El Número de Priscila asociado a una Red Aritmética

Vamos a introducir un nuevo concepto, que generaliza el de diferencia de una progresión aritmética; precisamente debemos empezar diciendo que el Nº de Priscila de una red aritmética unidimensional es la diferencia de la p.a. correspondiente.

4.4.1. Para Redes Aritméticas Bidimensionales (RAB)

Demostraremos ahora varios resultados en forma de teoremas:

- *La sucesión de las diferencias de las p. a. columna* $(v_i)_{i=1}^{n}$ *es también una p.a. Análogamente, la sucesión de las diferencias de las p. a. fila* $(h_i)_{i=1}^{n}$ *también es una p.a. Además tienen las dos la misma diferencia.*

…………………………[Se omite la demostración]

Llamaremos Número de Priscila asociado a una RAB a la diferencia común de las p.a. $(v_i)_{i=1}^{n}$ *ó* $(h_i)_{i=1}^{n}$

Vamos a encontrar los números de Priscila operando en una RAB, sin salirnos de ella:

- *En una RAB, si tomamos cuatro elementos "consecutivos" (en el sentido de que están situadas en dos filas y en dos columnas consecutivas) tal como se muestra en la figura:* $\begin{bmatrix} a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \\ a_{ij} & a_{i,j+1} \end{bmatrix}$

  Entonces se verifica que si efectuamos $(a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j}) - (a_{i,j+1} - a_{ij})$ *obtenemos como resultado el número de Priscila asociado a la R.A.B.*

…………………………[Se omite la demostración]

Como bien dice ella del nuevo concepto:

> *generaliza el de diferencia de una progresión aritmética; precisamente debemos empezar diciendo que el Nº de Priscila de una red aritmética unidimensional es la diferencia de la p.a. correspondiente.*

Es decir, que igual que la p. a. tradicionales tienen una diferencia, las RA2D tienen un concepto análogo, que es el *Número de Priscila* o *la Diferencia de Priscila.* Además la estudiante también la define para RA3D. Como se puede observar, vuelve a salir la relación de analogía como el nexo de unión entre distintas ideas matemáticas, en este caso conceptos: la analogía permite variar el contexto (la dimensión del espacio) sin variar la esencia del concepto (Diferencia de Priscila).

Volviendo al análisis del trabajo en grupo, una vez expuesto el Punto de partida, presentan los objetivos que buscan con el PIM en Anexo 6, p. 359 del documento RPA-TG. Entre ellos destacamos el que habla de las generalizaciones que buscan:

También nos proponemos la generalización de conceptos tales como "progresión aritmética" o "suma" a más de una dimensión, para así comprender mejor su naturaleza. Esta generalización implica la obtención de nuevas fórmulas y de nuevas teorías para estos conceptos.

Queda claro (corrigiendo el vocabulario) que se proponen *generalizar el concepto de progresión aritmética* (p.a.), *generalizar también la fórmula* (en este caso no es un concepto, como ellos dicen) *de la suma de los elementos de una progresión aritmética*. No mencionan otras generalizaciones que llevan a cabo y que aparecen en el trabajo.

6.3.2. Término general de una red aritmética

En cuanto a las generalizaciones, se va a analizar el proceso de obtención del término general de una red aritmética comenzando con una RA2D. En el documento, los estudiantes lo plantean en RPA-TG (Anexo 6, p. 361), de la forma siguiente:

En primer lugar vamos a demostrar el siguiente resultado, que da una expresión del término general:

Teorema

En una RA2D se cumple que $a_{i,j} = d_p(i-1)(j-1) + h_1(i-1) + v_1(j-1) + a_{1,1}$ *siendo* $a_{1,1}$ *el término en las coordenadas (1,1),* h_1 *la diferencia de la progresión aritmética de la primera fila,* v_1 *la diferencia de la progresión aritmética de la primera columna,* d_p *la Diferencia de Priscila, i, j la fila y columna en la que está situado el término buscado (o término general).*

Para demostrarlo, utilizaremos la expresión del término general de una p. a. Teniendo en cuenta lo dicho antes, que hi es la diferencia de las p. a. de la fila i, y que vi es la diferencia de la p. a. correspondiente a la columna i, tenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{l} a_{i,1} = h_1 \cdot (i-1) + a_{1,1} \\ a_{i,j} = v_i \cdot (j-1) + a_{i,1} \end{array}\right. \rightarrow a_{i,j} = \left[h_1 \cdot (i-1) + a_{1,1}\right] + v_i \cdot (j-1) \\ v_i = d_P \cdot (i-1) + v_1 \end{array}\right\} \rightarrow a_{i,j} = \left[h_1 \cdot (i-1) + a_{1,1}\right] + \left[d_P \cdot (i-1) + v_1\right] \cdot (j-1)$$

$$a_{i,j} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) + h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$$

Como se puede observar, la demostración es sencilla y clara, se trata de obtener el término general yendo (en la misma red aritmética se puede visualizar) desde $a_{1,1}$ hasta $a_{i,1}$, y desde éste hasta $a_{i,j}$, expresándolo en función de $a_{1,1}$, h_1 , v_1 , y la Diferencia de Priscila d_p. Hasta aquí no se detecta ningún rastro del uso de la analogía. En el documento dicen:

> *Para demostrarlo, utilizaremos la expresión del término general de una p. a*

pero eso no tiene nada que ver con el uso de la analogía.

Habrían utilizado la analogía si se hubieran dado cuenta de que para obtener el término general de una RA2D han usado el mismo método que se hace para obtener el término general de una progresión aritmética tradicional; en este último caso lo que se hace es un recorrido desde a_1 hasta a_n por la única dirección (la que representan los siguientes términos de la p.a.) que hay en ese *espacio unidimensional*. Para el caso de la RA2D se va desde $a_{1,1}$ hasta $a_{i,j}$ moviéndose por las dos direcciones independientes posibles en ese *espacio bidimensional*. Pero esto no lo han visto, por lo que, de momento, no se puede decir que hayan hecho uso de la analogía.

El trabajo continúa buscando el término general de una RA3D. En RPA-TG, (Anexo 6, p. 366), aparece de una manera muy clara en cuanto a la redacción:

Haciendo un razonamiento análogo al realizado en dos dimensiones, es decir, partiendo del término general de progresiones aritméticas lineales, a bidimensionales y finalmente a tridimensionales, demostración análoga a dos dimensiones, finalmente se obtiene:

$$a_{i,j,k} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) \cdot (k-1) + d_{i,j,1} \cdot (i-1) \cdot (j-1) + d_{i,1,k} \cdot (i-1) \cdot (k-1) + d_{1,j,k} \cdot (j-1) \cdot (k-1) +$$
$$+ d_{i,1,1} \cdot (i-1) + d_{1,j,1} \cdot (j-1) + d_{1,1,k} \cdot (k-1) + a_{1,1,1}$$

Siendo las Diferencias de Priscila de las caras del Prisma Aritmético y las de las aristas del prisma anterior. d_P *es la Diferencia de Priscila de esa RA3D y* $a_{1,1,1}$ *el primer término.*

El primer párrafo es fundamental para el análisis que se quiere llevar a cabo. La redacción es difusa; concretamente dicen:

> *Haciendo un razonamiento análogo al realizado en dos dimensiones, es decir, partiendo del término general de progresiones aritméticas lineales, a bidimensionales y finalmente a tridimensionales, demostración análoga a dos dimensiones,...*

Desmenuzando el párrafo se tiene que proceden secuenciadamente de la manera siguiente:

1. Comparan los términos generales de las progresiones aritméticas tradicionales con la expresión obtenida para las bidimensionales (RA2D) y de esta manera inducen (o conjeturan) la expresión del término general de la RA3D;
2. Elaboran una demostración análoga a la hecha en la RA2D que justifique la veracidad de la fórmula; es decir, construyen un recorrido desde $a_{i,1,1}$ hasta $a_{i,j,k}$,pasando por las tres direcciones del *espacio tridimensional,* aplicando las fórmulas de las p. a. y de las RA2D

Se analizan, a continuación, cada uno de los pasos:

Para el primero, lo que plantearían los estudiantes es comparar las expresiones de los términos generales obtenidos hasta ese momento, porque una vez obtenido el término general de una RA2D ya tienen dos entidades de la misma naturaleza para comparar: el término general de la p. a. tradicional y el de la RA2D. Las expresiones son:

$$a_{i,j} = d_p(i-1)(j-1) + h_1(i-1) + v_1(j-1) + a_{1,1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Las similitudes que se pueden detectar son:

1) El primer término en cada contexto (en cada *espacio*);
2) la diferencias de las primeras líneas (horizontal y vertical) por las coordenadas anteriores a la del término general. En el caso de la p. a. tradicional lo mismo, pero sólo en la única dirección posible coordenada anterior a la del término general;

3) la Diferencia de Priscila de la red bidimensional por el producto de las coordenadas anteriores a la del término buscado. Esta similitud no se puede contextualizar en la p. a. tradicional al ser su espacio unidimensional.

Con estas analogías establecidas entre los términos generales, los estudiantes podrían conjeturar que, *generalizando*, o con otras palabras, *por analogía*, el término general de una RA3D será:

$$a_{i,j,k} = d_P \cdot (i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1) + d_{i,j,1}\cdot(i-1)\cdot(j-1) + d_{i,1,k}\cdot(i-1)\cdot(k-1) + d_{1,j,k}\cdot(j-1)\cdot(k-1) +$$
$$+ d_{i,1,1}\cdot(i-1) + d_{1,j,1}\cdot(j-1) + d_{1,1,k}\cdot(k-1) + a_{1,1,1}$$

En el segundo paso, lo que expresan en el primer párrafo es la idea de hacer un recorrido por el paralelepípedo (ellos lo denominan prisma) aritmético partiendo del elemento $a_{1,1,1}$, yendo al $a_{i,1,1}$, después al $a_{i,j,1}$, y, por último al $a_{i,j,k}$. Esto sí es usar la analogía entre la estrategia usada para la demostración en el caso de la RA2D y la estrategia necesaria para la demostración en el caso de la RA3D. Se desarrolla esta idea en el siguiente párrafo.

La similitud en el procedimiento para construir la demostración en dimensión 3, basándose en el procedimiento utilizado en dimensión 2 es una manera de usar la analogía, que podríamos denominar *proceder por analogía*; los pasos dados en dimensión 3 son una imitación de los pasos dados en dimensión 2, adaptados al contexto nuevo (la variación en el número de dimensiones del espacio, el número de direcciones independientes). Se tiene detectado, por tanto, un primer uso de la analogía, bajo la forma que se ha denominado *proceder por analogía*.

Posteriormente deberían comprobar que esta expresión, además de expresar analogías con las otras, realmente responde a lo querían conseguir. Esto en el trabajo no lo hacen explícito, pero para el objetivo de este análisis, el uso de la analogía, eso es secundario.

De cualquier manera, el uso de la analogía en el primer paso no es igual que en el segundo. En el primero se tienen dos ideas que parecen tener similitudes, que parecen ser análogas, que se pueden comparar. El proceso de comparación sirve para detectar las analogías (en este caso similitudes o patrones comunes) para, posteriormente, utilizarlas en la construcción de una nueva entidad análoga a las anteriores, pero en un contexto más general; es decir, se generalizan las ideas iniciales a un contexto más abstracto. En la construcción de la nueva entidad se *procede por analogía*, utilizando las similitudes encontradas en la comparación previa. El segundo paso se centra en la selección de una estrategia, análoga a la de las RA2D, que permita la construcción de una demostración, no hay comparaciones previas.

Por tanto, en el primer paso, el uso de la analogía es más complejo, ya que, partiendo de dos entidades similares:

1. Se comparan entre sí para detectar y establecer todas las posibles similitudes y características comunes entre ellas. Como resultado de esta comparación, se dice que son análogas.

2. Con las similitudes encontradas se procede por analogía para construir otra entidad, en un contexto más general, generalizando las que se tenían inicialmente. Este nuevo contexto también podría ser menos general, menos abstracto, por lo que la nueva entidad sería un caso particular de las iniciales.

En el segundo paso, el uso de la analogía se centra en proceder por analogía para la construcción de una entidad (demostración) en un contexto, a partir de otra entidad de la misma naturaleza, pero de otro contexto.

Los estudiantes siguen desarrollando el PIM abordando la tarea de encontrar el término general de una red aritmética n-dimensional (RAnD). En este caso, con las *analogías* encontradas y validadas en los casos anteriores, fruto de la *comparación* entre expresiones, es fácil *proceder por analogía*, pero los problemas que se les presentaron aquí fueron sus limitaciones personales a la hora de representar simbólicamente esta idea compleja, que la tienen clara conceptualmente, pero solo saben representarla retóricamente: ¿Cómo expresar matemáticamente (con símbolos y notaciones) la suma de todos los productos posibles entre las n coordenadas (de un factor, de dos factores, de tres, etc. hasta los n factores)? En RPA-TG-10, pág. 17 está descrito. No se entra en ello porque no es una cuestión relacionada con el uso de la analogía. Lo que queda claro es que vuelven a hacer un uso similar al analizado anteriormente de forma minuciosa.

Apoyándose en los aspectos del marco teórico (capítulo 3, punto 3.3.1.), se finaliza el análisis de la búsqueda de la expresión del término general de una red aritmética presentando la Tabla 6.8. de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas. Los invariantes operacionales que se quieren identificar son, sobre todo, los relacionados con el uso de la analogía.

<table>
<tr><th colspan="4">REDES ARITMÉTICAS (I)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="10">D_1
Término general de una Red Aritmética</td><td rowspan="3">$F_{1,1}$ Término General de una RA2D</td><td>$C_{1,1,1}$ Selección de la estrategia para la demostración</td><td rowspan="10">- Comparación de fórmulas y búsqueda de las similitudes que caracterizan su analogía (detección de analogías)
- Construcción de una fórmula, análoga a otras, en un contexto diferente (proceder por analogía)
- Análisis de los razonamientos y pasos de una demostración e identificación de las estrategias y procedimientos implicados
- Diseño y construcción de una demostración que tiene unos razonamientos análogos a los de otra, en un contexto diferente al de la primera (proceder por analogía)</td></tr>
<tr><td>$C_{1,1,2}$ Cálculo de $a_{i,1}$ desde $a_{1,1}$</td></tr>
<tr><td>$C_{1,1,3}$ Cálculo de $a_{i,j}$ desde $a_{i,1}$ Obtención justificada de la fórmula del término general</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$F_{1,2}$ Término General de una RA3D</td><td>$C_{1,2,1}$ Comparación de las expresiones para RA1D y RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,2}$ Identificación de analogías y similitudes</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,3}$ Construcción de la expresión para RA3D</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,4}$ Selección de la estrategia para la demostración</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,5}$ Cálculo de $a_{i,1,1}$ desde $a_{1,1,1}$</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,6}$ Cálculo de $a_{i,j,1}$ desde $a_{i,1,1}$</td></tr>
<tr><td>$C_{1,2,7}$ Cálculo de $a_{i,j,j}$ desde $a_{i,j,1}$. Obtención justificada de la fórmula del término general</td></tr>
</table>

	$F_{1,3}$ Término General de una RAnD	$C_{1,3,1}$ Comparación de las expresiones para RA1D, RA2D y RA3D	
		$C_{1,3,2}$ Identificación de analogías y similitudes	
		$C_{1,3,3}$ Construcción de la expresión para RAnD. Representación y simbolización.	

Tabla 6.8. Dominios de situaciones para el término general

En el punto 6.3.5. de este Capítulo se hace un análisis conjunto de todos los problemas tratados sobre las redes aritméticas para obtener unos primeros resultados sobre el papel y uso de la analogía.

6.3.3. Suma de los elementos de una red aritmética

El PIM desarrollado por los cinco estudiantes continúa con la tarea de buscar una expresión para la suma de todos los términos de una red aritmética. Para ello vuelven al segundo problema del punto de partida y al proceso de su resolución. En RPA-TG, (Anexo 6, p. 358) exponen lo siguiente:

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Para resolver este problema lo que vamos a hacer es suponer un cuadro rectangular con las condiciones arriba indicadas de dimensiones $(n \times m)$ y, vamos a sumar sus elementos fila a fila. Llamaremos n al número de filas y m al número de columnas.

$$\begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \end{pmatrix}$$

A partir de aquí, sumando fila por fila obtenemos:

$$S_1 = \frac{a_{1,1} + a_{1,m}}{2} \cdot m$$

$$S_2 = \frac{a_{2,1} + a_{2,m}}{2} \cdot m$$

$$S_n = \frac{a_{n,1} + a_{n,m}}{2} \cdot m$$

Si ahora sumamos todas las filas juntas obtenemos:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{m}{2} \cdot \left[\left(a_{1,1} + a_{2,1} + \ldots + a_{n,1} \right) + \left(a_{1,m} + a_{2,m} + \ldots + a_{n,m} \right) \right] = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m} \right)$$

La fórmula que hemos obtenido expresa la suma de todos los elementos del cuadro en función de los términos de sus esquinas. Por lo tanto, para resolver el problema que nos ocupa.

$$a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m} = \frac{4S}{n \cdot m} = \frac{4 \cdot 110721}{221} = 2004$$

Como puede observarse, la resolución del segundo problema inicial ha generado, directamente, la fórmula de la suma de los elementos de cualquier RA2D, siendo el problema un caso particular. Esto lo dejan patente cuando presentan el resultado en RPA-TG (Anexo 6, p. 371):

> ***Teorema:*** *La suma de los elementos de una RA2D es* $\frac{n.m}{4}(a_{1,1}+a_{1,m}+a_{n,1}+a_{n,m})$
>
> *(Resultado que generaliza la solución del 2º problema del punto 1.1, uno de los problemas iniciales y punto de partida del presente trabajo).*
>
> *Como podemos observar, la suma de todos los elementos de una RA2D se obtiene a partir de los cuatro elementos de las esquinas de dicha red. Hemos obtenido así una generalización para dos dimensiones, de la fórmula tradicional de las progresiones aritméticas unidimensionales, ya que si m=1, obtenemos:*
>
> $$S_n=\frac{n\cdot 1}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,m}+a_{n,m}\right)=\frac{n}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,1}+a_{n,1}\right)=\frac{n}{4}\cdot\left(2a_{1,1}+2a_{n,1}\right)=\frac{n\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}\right)}{2}$$
>
> *Ésta es la fórmula de la suma de los n primeros términos de una RA1D o p. a. tradicional.*

Pero lo interesante del episodio es lo que sigue a continuación del teorema: la comprobación de que la fórmula tradicional para sumar p.a. es un caso particular de la obtenida, para el caso en que las dimensiones de la tabla sean del tipo nx1 o 1xm. Esto sí que demuestra que las fórmulas

$$S=\frac{(a_1+a_n).n}{2}\quad ;\quad S=\frac{n.m}{4}(a_{1,1}+a_{1,m}+a_{n,1}+a_{n,m})$$

son análogas, situadas en contextos diferentes, siendo la primera un caso particular de la segunda o, con otras palabras, la segunda es una generalización de la primera.

En este caso, la analogía descrita es fruto de la comparación entre ellas, y se ha producido una vez que se ha obtenido la segunda de ellas. Como se ha dicho más arriba, esta es una de las formas detectadas de uso de la analogía.

Prosiguiendo con el análisis, los estudiantes buscan fórmulas alternativas para la suma de los elementos de una RA2D, por analogía con otras conocidas de las p. a. tradicionales. En RPA-TG (Anexo 6, p. 371) exponen lo siguiente:

> *Por otra parte, sabemos que la suma de los elementos de una RA1D se puede obtener a partir del término central si* n *es impar. Así para la progresión* $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ *se cumple que* $S=a_{\frac{n+1}{2}}\cdot n$ *siendo* $a_{\frac{n+1}{2}}$ *el término central de la sucesión, siendo* n *es impar. Este resultado nos permite expresar la suma de los términos de una RA2D en función de un solo elemento de la misma, siempre que las dimensiones (nº de filas y de columnas) de la RA2D sean impares.*
>
> *Sumando por filas nos queda:* $S_{n,1}=n\cdot a_{\frac{n+1}{2},1};S_{n,2}=n\cdot a_{\frac{n+1}{2},2};\ldots;S_{n,j}=n\cdot a_{\frac{n+1}{2},m}$
>
> *Sumando todas las filas tenemos:*
>
> $$S_{n,m}=\sum_{i,j=1}^{n,m}S_{i,j}=\left(a_{\frac{n+1}{2},1}+a_{\frac{n+1}{2},2}+\ldots+a_{\frac{n+1}{2},m}\right)\cdot n=\left[\frac{m}{2}\cdot\left(a_{\frac{n+1}{2},1}+a_{\frac{n+1}{2},m}\right)\right]\cdot n=n\cdot m\cdot a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}}$$

Siendo este elemento de la RA2D el que podríamos considerar como término central de la misma siempre que m y n sean impares.

Como se puede observar los estudiantes parece que empiezan a pensar que todos los resultados de las p. a. se van a poder trasladar, por analogía, a las redes aritméticas. En este caso han generalizado la fórmula de la suma de los términos de una p.a. cuando el número de términos de la misma es impar. También se puede comprobar que si en la fórmula obtenida una de las dimensiones valiera 1, entonces resulta la fórmula inicial de las p. a. Por tanto, en este proceso también han utilizado la como procedimiento para extender una idea de las p. a. tradicionales a las RA2D.

Volviendo al cálculo de fórmulas para la suma, los estudiantes abordan el caso de una RA3D en RPA-TG (Anexo 6, p. 374):

Al igual que en el caso de las RA2D, en este caso también existe una fórmula análoga a la anterior que nos determina la suma de los elementos de una RA3D.

Dada una RA3D cualquiera

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a_{1,m,p} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{n,m,p} \\
 & \nearrow & \uparrow & & & \nearrow & \uparrow \\
a_{1,m,1} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{n,m,1} & & | \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
| & & a_{1,1,p} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{n,1,p} \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & \\
a_{1,1,1} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{n,1,1} & &
\end{array}$$

Es posible calcular la suma de los n.m.p primeros términos calculando la suma de las RA2D para cada p:

$$S_{n,m,1} = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1,1} + a_{n,1,1} + a_{1,m,1} + a_{n,m,1} \right); S_{n,m,2} = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1,2} + a_{n,1,2} + a_{1,m,2} + a_{n,m,2} \right)$$

$$S_{n,m,3} = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1,3} + a_{n,1,3} + a_{1,m,3} + a_{n,m,3} \right); \ldots; S_{n,m,p} = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1,p} + a_{n,1,p} + a_{1,m,p} + a_{n,m,p} \right)$$

Sumando todas las "láminas" de la RA3D:

$$S_{n,m,p}=S_{n,m,1}+S_{n,m,2}+\ldots+S_{n,m,p}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{n,1,1}+a_{1,m,1}+a_{n,m,1}\right)+\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,2}+a_{n,1,2}+a_{1,m,2}+a_{n,m,2}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,p}+a_{n,1,p}+a_{1,m,p}+a_{n,m,p}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\left(a_{1,1,1}+a_{n,1,1}+a_{1,m,1}+a_{n,m,1}\right)+\left(a_{1,1,2}+a_{n,1,2}+a_{1,m,2}+a_{n,m,2}\right)+\ldots+\left(a_{1,1,p}+a_{n,1,p}+a_{1,m,p}+a_{n,m,p}\right)\right]=$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,2}+\ldots+a_{1,1,p}\right)+\left(a_{n,1,1}+a_{n,1,2}+\ldots+a_{n,1,p}\right)+\left(a_{1,m,1}+a_{1,m,2}+\ldots+a_{1,m,p}\right)+\left(a_{n,m,1}+a_{n,m,2}+\ldots+a_{n,m,p}\right)\right]$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\frac{p}{2}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{n,1,1}+a_{n,1,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{1,m,1}+a_{1,m,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)\right]=$$

$$=\frac{n\cdot m\cdot p}{8}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}+a_{n,1,1}+a_{n,1,p}+a_{1,m,1}+a_{1,m,p}+a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)=S_{n,m,p}$$

Teorema: *La suma de los elementos de una RA3D, de dimensiones n,m,p, viene dada por la siguiente expresión:*

$$S_{n,m,p}=\frac{n\cdot m\cdot p}{8}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}+a_{n,1,1}+a_{n,1,p}+a_{1,m,1}+a_{1,m,p}+a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)$$

Esta fórmula es análoga a la de dos dimensiones y a la fórmula tradicional de las RA1D y nos da la suma de los nxmxp primeros elementos de la RA3D, en función de las dimensiones n,m,p y de los 8 elementos de las esquinas.

Análogamente, también existirá una expresión para determinar la suma de los elementos de una $RA3D$ *en función de su término central. Si en una* $RA3D$ n,m,p *son impares, existe un término central que coincide con* $a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{p+1}{2}}$.

En este caso, el uso de la analogía es doble:

1. En el procedimiento de demostración. Si para calcular las suma de una RA2D calculaban la suma de todas las p. a. fila, para una RA3D de dimensiones n, m, p, calculan *la suma de las RA2D para cada p*; es decir que la calculan sumando las *láminas* bidimensionales que componen la RA3D. Las filas en dimensión 2 son las análogas de las láminas en dimensión 3. Han *procedido por analogía,* construyendo

<table>
<tr><th colspan="4">REDES ARITMÉTICAS (II)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="14">D_2
Suma de todos los términos de una Red Aritmética</td><td rowspan="4">$F_{2,1}$
Suma en una RA2D</td><td>$C_{2,1,1}$ Búsqueda y selección de la estrategia para la demostración.</td><td rowspan="14">- Comparación de fórmulas y búsqueda de las similitudes que caracterizan su analogía (detección de analogías)
- Construcción de una fórmula, análoga a otras, en un contexto diferente (proceder por analogía)
- Análisis de los razonamientos y pasos de una demostración e identificación de las estrategias y procedimientos implicados
- Diseño y construcción de una demostración que tiene unos razonamientos análogos a los de otra, en un contexto diferente al de la primera (proceder por analogía)</td></tr>
<tr><td>$C_{2,1,2}$ Resolución de un caso particular por un método general, con los elementos de los extremos de la RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{2,1,3}$ Resolución del problema general en función de los elementos de las esquinas.</td></tr>
<tr><td>$C_{2,1,4}$ Diseño y construcción de una fórmula en función del término central, por analogía con otra de las p. a.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$F_{2,2}$
Suma en una RA3D</td><td>$C_{2,2,1}$ Comparación de las expresiones conocidas de las RA1D y RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,2}$ Identificación de analogías y similitudes</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,3}$ Construcción de la expresión para RA3D con los elementos de las esquinas (vértices de la figura)</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,4}$ Selección de la estrategia para la demostración</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,5}$ Suma de las RA2D (láminas) contenidas en la RA3D. Obtención justificada de la fórmula en función de los elementos de las esquinas</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,6}$ Comparación de la fórmula obtenida, comprobando su analogía con las RA1D y RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{2,2,7}$ Diseño y construcción de una fórmula en función del término central, por analogía con otras de las p.a. y las RA2D.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$F_{2,3}$
Suma en una RAnD</td><td>$C_{2,3,1}$ Comparación de las expresiones para RA1D, RA2D y RA3D</td></tr>
<tr><td>$C_{2,3,2}$ Identificación de analogías y similitudes</td></tr>
<tr><td>$C_{2,3,3}$ Construcción de la expresión para RAnD por analogía. Representación y simbolización.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tabla 6.9. Dominio de situaciones para la suma de los elementos de una RA2D</td></tr>
</table>

una demostración para las RA3D análoga a la de las RA2D.

2. En el análisis de la fórmula. Una vez obtenida la fórmula de la suma para una RA3D, la comparan con las correspondientes para una RA2D y una RA1D y concluyen que son análogas: a) producto de la mitad de las dimensiones; b) suma de los elementos de los extremos de la red aritmética correspondiente. Lo expresan escribiendo:

Esta fórmula es análoga a la de dos dimensiones y a la fórmula tradicional de las RA1D y nos da la suma de los nxmxp primeros elementos de la RA3D, en función de las dimensiones n,m,p y de los 8 elementos de las esquinas.

También usan el resultado obtenido en las RA2D para sumar sus elementos a partir del término central (siempre que las dimensiones sean nº impares), para hacer lo mismo en dimensión 3 si sus dimensiones son impares.

Para finalizar este apartado de la suma de los elementos de una red aritmética, se analizará ahora el caso de una RAnD. Figura en la pág. 20 del documento RPA-TG y se desarrolla de la siguiente forma:

Debemos aclarar que para las Redes Aritméticas n-dimensionales los resultados son análogos a los anteriores, aunque no los demostraremos por problemas de subíndices y de notación compleja.
Llamaremos a las dimensiones $d_1, d_2, \ldots, d_n$, siendo n el número de dimensiones:
Así, la suma de todos sus elementos vendrá dada en función de la mitad de todas sus dimensiones $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{d_n}{2}=\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2^n}$ multiplicadas por los 2^n elementos situados en las "esquinas" del hiper-prisma n-dimensional formado:

$$S_{d_1,d_2,\ldots,d_n}=\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2^n}\left[\sum_{\sigma\in T}\left(a_{\sigma(p_1),\sigma(p_2),\ldots,\sigma(p_n)}\right)\right]$$

Siendo σ la aplicación que hace que las coordenadas sean propias de las esquinas:

$$\sigma:\{p_1,p_2,\ldots^{n)},p_n\}\rightarrow\{1,d_1,d_2,\ldots^{n)},d_n\}\ ;\ \sigma(p_i)=\begin{cases}1\\ \text{ó}\\ d_i\end{cases}$$

$$P=\{p_1,p_2,\ldots^{n)},p_n\};\quad D=\{1,d_1,d_2,\ldots^{n)},d_n\}$$

Y T el conjunto de estas aplicaciones: $T=\left\{\sigma: P\rightarrow D\ ;\ \sigma(p_i)=\begin{cases}1\\ \text{ó}\\ d_i\end{cases}\right\}$

Debe tenerse en cuenta que $card\ T=2^n$ (como era lo esperado).

Como en el caso de la expresión del término general, el problema principal para expresar la fórmula para la suma de los elementos de una RAND es exclusivamente de notación, porque la idea la tienen clara: hay que sumar los 2^n elementos de las *esquinas* del hiper-prisma n-dimensional (los *vértices del hiperprisma)* y multiplicar por la mitad de cada una de las dimensiones de la RAnD. Sin entrar a valorar la complicación de la fórmula final obtenida, sí hay que dejar claro que la idea que la genera, que la expresan como:

la suma de todos sus elementos vendrá dada en función de la mitad de todas sus dimensiones $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{d_n}{2}=\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2^n}$ *multiplicadas por los* 2^n *elementos situados en las "esquinas" del hiper-prisma* n *-dimensional*

es la análoga a las de las otras dimensiones. Por tanto el uso de la analogía se ha concretado en el *proceder por analogía* para la construcción de la fórmula.

Se finaliza el análisis de la búsqueda de una fórmula para calcular la suma de los elementos de una red aritmética presentando la Tabla 6.9. de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas. Los invariantes operacionales que se quieren identificar son, sobre todo, los relacionados con el uso de la analogía.

En el punto 6.3.5. de este Capítulo se hace un análisis conjunto de todos los problemas tratados sobre las redes aritméticas para obtener unos primeros resultados sobre el papel y uso de la analogía.

6.3.4. La interpolación de medios aritméticos en una red aritmética

El ultimo problema abordado en el PIM es el de la interpolación de medios aritméticos en una red aritmética, a semejanza de lo que se puede hacer en una p.a.

Para ello, los estudiantes plantean y resuelven el problema, abordando sucesivamente los casos de las distintas redes aritméticas. En RPA-TG (Anexo 6, p. 376) comienza el apartado par el caso de una RA2D:

Dados cuatro números de un cuadro aritmético que formen un rectángulo, introducir entre ellos un número determinado de elementos $(n\times m)$*, los deseados, y que el cuadro resultante siga siendo una* $RA2D$*:*

C				D
A				B

A partir de este problema, tratamos de calcular el término general del nuevo cuadro, el que forman los nuevos números y los anteriores, cuadro que llamaremos "interpolado". Que deberá responder al término general:

$$a_{i,j}=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot(j-1)+a_{1,1}$$

Comencemos por calcular h_1 *y* v_1*: Igualando* i *a 1, obtenemos el término general para la primera columna, que será una progresión aritmética, por lo que será fácil de interpolar* $a_{1,j}=v_1\cdot(j-1)+a_{1,1}$ *Sabemos que en la progresión aritmética interpolada debe haber* $m+2$ *términos, así que, sustituyéndolo por* j *y despejando obtendremos* v_1' *y* h_1' *del cuadro interpolado, también podemos igualar* $a_{1,1}$ *a A (según la figura superior) y* $a_{1,m+2}$ *a* C *:*

$$C = v_1' \cdot (m+1) + A \qquad B = h_1' \cdot (n+1) + A$$

$$v_1' = \frac{C-A}{m+1} \qquad h_1' = \frac{B-A}{n+1}$$

Para obtener la Diferencia de Priscila nos vamos a servir del hecho de que las diferencias de las columnas forman a su vez progresiones aritméticas, se trata del mismo procedimiento de antes pero interpretando ahora las diferencias verticales como términos de una progresión aritmética que hay que interpolar.

$$d_P' = \frac{v_n' - v_1'}{n+1} = \frac{\frac{D-B}{m+1} - \frac{C-A}{m+1}}{n+1} = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)}$$

Sustituyendo cada incógnita en su lugar obtendremos el término general:

$$a_{i,j}' = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)} \cdot (i-1)\cdot(j-1) + \frac{B-A}{n+1}\cdot(i-1) + \frac{C-A}{m+1}\cdot(j-1) + A$$

La suma de este cuadro resulta sencilla ya que ya tenemos definidas las dimensiones del mismo, n+2, m+2 y los términos de las esquinas (A,B,C,D):

$$S = \frac{(n+2)(m+2)}{4}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D})$$

Aunque al principio la redacción es claramente mejorable, se entienden las ideas. El enfoque que adoptan es calcular el término general de la RA2D resultante después de llevar a cabo la interpolación:

$$a_{i,j} = d_P \cdot (i-1)\cdot(j-1) + h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$$

Para ello deben calcular los valores de h_1 , v_1 , d_p , sabiendo que van a colocar nxm elementos (es decir, que la RA2D tiene por dimensiones n+2, m+2). El método utilizado es el análogo al que se utiliza en las p. a. tradicionales, aplicado a las p. a. primera fila, primera columna y a la p. a. formada por las diferencias v_1, v_2, ..., de donde obtienen la Diferencia de Priscila. Una vez calculados esos valores, se substituyen en la expresión, quedando:

$$a_{i,j}' = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)} \cdot (i-1)\cdot(j-1) + \frac{B-A}{n+1}\cdot(i-1) + \frac{C-A}{m+1}\cdot(j-1) + A$$

Con ello queda resuelto el problema.

Respecto al uso de la analogía, el problema de interpolar en p. a. se resuelve calculando la diferencia de la p.a. resultante. Para la RA2D lo han hecho exactamente de la misma manera, luego han obrado de forma análoga a como lo harían con p. a. tradicionales, pero en el nuevo contexto bidimensional.

Para el caso de las RA3D, en RPA-TG (Anexo 6, p. 377) desarrollan el caso:

El modo de proceder es el mismo que en el anterior caso salvo que ahora se interpola en tres dimensiones siendo 8 los números que conocemos y habiendo que colocar $(n\times m\times p)$ *números entre esas 8 esquinas:*

Al igual que para dos dimensiones, observamos el término general de un prisma aritmético normal de tres dimensiones y calculamos las nuevas incógnitas del prisma interpolado

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & G & \leftarrow & - & \rightarrow & H \\
 & \square & \uparrow & & & \square & \uparrow \\
C & \leftarrow & + & \rightarrow & D & & | \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
| & & E & \leftarrow & + & \rightarrow & F \\
\downarrow & \square & & & \downarrow & \square & \\
A & \leftarrow & - & \rightarrow & B & &
\end{array}$$

El término general es:

$$a_{i,j,k}=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)+d_{i,j,1}\cdot(i-1)\cdot(j-1)+d_{i,1,k}\cdot(i-1)\cdot(k-1)+d_{1,j,k}\cdot(j-1)\cdot(k-1)$$
$$+d_{i,1,1}\cdot(i-1)+d_{1,j,1}\cdot(j-1)+d_{1,1,k}\cdot(k-1)+a_{1,1,1}$$

Procedemos a calcular la Diferencia de Priscila del nuevo prisma en función de los términos interpolados sabiendo que las de las "láminas" del prisma forman una progresión aritmética:

$$d_P{}'=\frac{k_p{}'-k_1{}'}{p+1}=\frac{\dfrac{E-F-G+H}{(n+1)\cdot(m+1)}-\dfrac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)}}{p+1}=\frac{E-F-G+H-A+B+C-D}{(n+1)\cdot(m+1)\cdot(p+1)}$$

A continuación calculamos $d_{i,j,1}{}',d_{i,1,k}{}',d_{1,j,k}{}'$ *aplicando los resultados obtenidos en dos dimensiones, ya que estas incógnitas representan las Diferencias de Priscila de las caras:*

$$d_{i,j,1}{}'=\frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)};\; d_{i,1,k}{}'=\frac{A-B-E+F}{(n+1)\cdot(m+1)};\; d_{1,j,k}{}'=\frac{A-E-C+G}{(n+1)\cdot(m+1)}$$

Ahora calculamos $t_1{}',t_2{}',t_3{}'$ *que son diferencias lineales, por lo que son sencillas de calcular:*

$$d_{i,1,1}{}'=\frac{B-A}{n+1};\; d_{1,j,1}{}'=\frac{C-A}{m+1};\; d_{1,1,k}{}'=\frac{E-A}{p+1}$$

Sustituimos ahora todas las incógnitas en el término general de una $RA3D$ *y obtenemos el término general del cuadro interpolado:*

$$a_{i,j,k}{}'=(E-F-G+H-A+B+C-D)\cdot\frac{(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(m+1)\cdot(p+1)}+(A-B-C+D)\cdot\frac{(i-1)\cdot(j-1)}{(n+1)\cdot(m+1)}+$$
$$+(A-B-E+F)\cdot\frac{(i-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(p+1)}+(A-E-C+G)\cdot\frac{(j-1)\cdot(k-1)}{(m+1)\cdot(p+1)}+(B-A)\cdot\frac{i-1}{n+1}+(C-A)\cdot\frac{j-1}{m+1}+(E-A)\cdot\frac{k-1}{p+1}+A$$

Análogamente a como lo hicimos en dos dimensiones obtenemos la fórmula para la suma de todo el cuadro:

$$S = \frac{(n+2)(m+2)(p+2)}{8}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H})$$

Como puede comprobarse el método es el análogo al utilizado en dimensión 2, aprovechando muchos de los resultados obtenidos entonces. El uso de la analogía es para el modo de proceder.

Por último, para el caso de las RAnD, abordan el problema asumiendo de entrada el problema de la notación, que aparece en todas las cuestiones relativas a las RanD. En RPA-TG (Anexo 6, p. 378) plantean sus ideas:

En este caso no podremos escribir el término general del mismo ya que resulta muy difícil escribir todas, 2^n, las nuevas incógnitas en función de las esquinas. Sin embargo sí que podemos calcular la Diferencia de Priscila del nuevo hiper-prisma interpolado analizando las analogías existentes entre los dos primeros casos:

Sabemos que para calcular cualquier diferencia, ya sea de Priscila o no, para cualquier dimensión, siempre hay que restar el último término del primero, pero si a su vez, estos términos son Diferencias de Priscila correspondientes a una dimensión menor, entonces vuelve a ser necesario hacer una resta del último menos el primer término.

Esto nos da lugar a que, a cada término le corresponda estar sumado o restado, según hemos podido observar en los dos casos analizados.

Para eso debemos preguntarnos: ¿qué diferencia al último término de cualquier progresión en una dimensión dada, del primero en la misma? La respuesta está en las coordenadas, el último término tendrá como coordenada i-ésima di (cuyo signo será positivo), mientras que el primero de dicha sucesión será 1 (que llevará signo negativo).

El desarrollo sigue, logrando presentar algunos resultados parciales que calculan, pero para el análisis del papel de la analogía lo seleccionado es suficiente.

En primer lugar dan por hecho que no va a poder escribir la expresión del término general de la RAnD resutante de la interpolación, por la dificultad de calcular las 2^n-1 diferencias que forman parte de la expresión del término general (ellos dicen que son 2^n, pero no es así). A pesar de ello plantean:

> *sí que podemos calcular la Diferencia de Priscila del nuevo hiper-prisma interpolado analizando las analogías existentes entre los dos primeros casos*

Es decir, que *analizando las analogías* (haciendo explícitos los patrones o invariantes) de los casos RA2D y RA3D, pueden encontrar las estrategias clave del proceso de búsqueda de esas diferencias. Estas son *que para calcular cualquier diferencia, ya sea de Priscila o no, para* *cualquier dimensión, siempre hay que restar el último término del primero*. Esta es la clave en una interpolación de medios aritméticos, para poder calcular la diferencia que permite interpolar los términos entre el primero y el último. Y esto pasa en cualquier dimensión.

Por tanto, aunque no puedan terminar de resolver el problema, el escollo son las limitaciones en las posibilidades de expresar, representar y simbolizar, no la dificultad conceptual, que esa está resuelta, ya que tienen claro cómo se debe hacer. Además la idea para hacerlo es la análoga a la utilizada en las dimensiones anteriores. De ahí que vuelva a aparecer la analogía en su uso procedimental.

Volviendo a utilizar el marco teórico (capítulo 3, punto 3.3.1), se finaliza el análisis de la búsqueda de una fórmula para interpolar medios aritméticos en una red aritmética presentando la tabla 6.10. de los *dominios de situaciones, familias de actividad y clases de situaciones*, teniendo en cuenta los niveles de organización entre instrumentos y situaciones, junto con los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del estudiante en cada una de las situaciones y tareas. Los invariantes operacionales que se quieren identificar son, sobre todo, los relacionados con el uso de la analogía, que forma parte de la pregunta 2 (cuestiones 2.1. y 2.2.) de la investigación.

El PIM sigue abordando otros problemas que no se van a analizar aquí ya que suponen el cambio de las progresiones aritméticas por progresiones geométricas y la analogía sigue apareciendo con los mismos usos.

<table>
<tr><th colspan="4">REDES ARITMÉTICAS (III)</th></tr>
<tr><th>DOMINIO</th><th>FAMILIAS DE ACTIVIDAD</th><th>CLASES DE SITUACIONES</th><th>INVARIANTES OPERACIONALES</th></tr>
<tr><td rowspan="10">D_3
Interpolación de medios aritméticos en una Red Aritmética</td><td rowspan="4">$F_{3,1}$
Interpolación en una RA2D</td><td>$C_{3,1,1}$ Planteamiento del problema, a partir del término general de una RA2D.</td><td rowspan="10">- Comparación de fórmulas y búsqueda de las similitudes que caracterizan su analogía (detección de analogías)
- Expresión retórica de una fórmula, análoga a otras, en un contexto diferente (proceder por analogía)
- Análisis de los razonamientos y pasos de una demostración e identificación de las estrategias y procedimientos implicados
- Diseño y construcción de una demostración que tiene unos razonamientos análogos a los de otra, en un contexto diferente al de la primera (proceder por analogía)</td></tr>
<tr><td>$C_{3,1,2}$ Cálculo de h_1 interpolando en la p.a. primera fila de la RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{3,1,3}$ Cálculo de v_1 interpolando en la p.a. primera columna de la RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{3,1,4}$ Cálculo de d_p en la p.a. $v_1, v_2, \ldots$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$F_{3,2}$
Interpolación en una RA3D</td><td>$C_{3,2,1}$ Planteamiento del problema, a partir del término general de una RA3D, por analogía con el caso de las RA2D</td></tr>
<tr><td>$C_{3,2,2}$ Cálculo de $d_{1,1,k}$; $d_{1,j,1}$; $d_{i,1,1}$ interpolando en las p.a. de las aristas de la RA3D</td></tr>
<tr><td>$C_{3,2,3}$ Cálculo de $d_{i,1,k}$; $d_{i,j,1}$; $d_{1,j,k}$ interpolando en las caras de la RA3D (que son RA2D)</td></tr>
<tr><td>$C_{3,2,4}$ Cálculo de la Diferencia de Priscila de la RA3D, d_p , en la p.a. que forman las Diferencias de Priscila de las láminas de la RA3D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$F_{3,3}$
Interpolación en una RAnD</td><td>$C_{2,3,1}$ Comparación de las expresiones en RA1D, RA2D y RA3D</td></tr>
<tr><td>$C_{2,3,2}$ Identificación de analogías y</td></tr>
</table>

		similitudes	
		$C_{2,3,3}$ Construcción de la expresión para RAnD por analogía. Expresión retórica, no simbólica.	

Tabla 6.10. Dominios de situaciones de la interpolación de medios aritméticos

6.3.5 Análisis conjunto. Primeros resultados

En el comienzo de este análisis, es conveniente recordar la pregunta 2.2. del problema de investigación que se trata en esta parte del Capítulo:

> *¿La analogía funciona como un catalizador en los procesos de abstracción y búsqueda de generalizaciones? ¿Qué papel juega la analogía en estos procesos?*

También se recuerda que, al comienzo del presente Capítulo, en la tabla 6.2, se planteaban los resultados esperados del análisis llevado a cabo. Respecto al papel de la analogía en las generalizaciones, se esperaban los siguientes (se han suprimido los relativos a ejemplos y razonamiento, que se han trabajado anteriormente y se han numerado los que hacen referencia a la analogía):

MEDIACIONES	RESULTADOS ESPERADOS
HACIA LOS ESTUDIANTES (EPISTÉMICAS)	1. Valorar si un PIM puede continuarse, dando lugar a otros, generándose así una teoría matemática, con sus definiciones, propiedades, teoremas, etc. 2. Explicitar los invariantes operacionales (conocimientos en acción) de los esquemas contenidos en el instrumento 3. Conocer los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes en el desarrollo del PIM en relación con la analogía. 4. Reflexionar sobre el papel y uso de la analogía en los procesos de generalización.

Veamos hasta qué punto se han conseguido:

1. *Valorar si un PIM puede continuarse, dando lugar a otros, generándose así una teoría matemática, con sus definiciones, propiedades, teoremas, etc.* Los análisis realizados sobre los dos trabajos, el primero individual, recogido en el documento TN-PI y el segundo en grupo, recogido en el documento RPA-TG-10, reflejan el nacimiento y consolidación de una teoría nueva sobre redes aritméticas multidimensionales, con sus definiciones, propiedades, teoremas, fórmulas, etc. Todas las ideas importantes de las progresiones aritméticas: definición, término general, diferencia, suma de sus términos e interpolación de medios aritméticos, han sido generalizadas a las redes aritméticas en cualquier dimensión, aunque algunos resultados relativos a las RAnD acusan la debilidad de una representación simbólica deficiente, pero si se le añaden otros resultados que no se han analizado, como son los relativos a redes geométricas (en las que las filas y columnas formen progresiones geométricas) la teoría está fuertemente afianzada teniendo varios problemas abiertos, sin solucionar, lo que le da más vida aún.

Por tanto los PIM sí pueden encadenarse siempre que el tema de trabajo sea rico en posibilidades, diversidad de caminos y complejidad adecuada al alcance conceptual de los estudiantes.

2. Explicitar los invariantes operacionales (conocimientos en acción) de los esquemas contenidos en el instrumento. El análisis efectuado a través de las mediaciones epistémicas en el marco de la Génesis Documental se ha constituido como un recurso funcional, eficaz e imprescindible. Las mediaciones epistémicas consiguen identificar los invariantes operacionales de los esquemas mentales que subyacen en los instrumentos. Esos conocimientos en acción, que están implícitos en los instrumentos, son rastreados e identificados a través de las mediaciones epistémicas y se concretan y hacen explícitos por medio de las categorías contenidas en los Dominios de organización: Familias de Actividad y Clases de Situaciones. Las tablas elaboradas con los dominios respectivos los recogen de forma precisa.

3. Conocer los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes en el desarrollo del PIM en relación con la analogía. Los análisis desarrollados han permitido concretar los papeles de la analogía en relación con la generalización y no solo con esta última (como se verá un poco más abajo). Se resaltan a continuación los primeros resultados, fruto del análisis realizado, sobre procesos cognitivos puestos en práctica por los estudiantes del trabajo en grupo, en relación con la analogía:

- La Comparación de entidades matemáticas. Búsqueda de similitudes y diferencias.

- La identificación de analogías entre distintos contenidos matemáticas (conceptos o procedimientos)

- La Generalización de ideas conceptuales y procedimentales.

- La elaboración de conjeturas y su justificación.

- La identificación de estrategias y su puesta en práctica en los procesos de demostración o de resolución de problemas.

- La identificación de analogías entre ideas o entidades matemáticas

4. Reflexionar sobre el papel y uso de la analogía en los procesos de generalización. En varios apartados de este Capítulo ha quedado evidente que la analogía ha sido usada de dos formas bien diferenciadas:

Uso 1. El primer uso se da cuando se tiene una entidad matemática en un contexto determinado (una idea conceptual o procedimental, un resultado, un modelo, una estructura, etc.) y se procede secuencialmente en dos pasos como sigue:

1A. Se identifican las características más importantes de la entidad en su contexto, las que la definen, mediante un análisis de sus aspectos claves y de sus componentes esenciales o básicas.

2A. Posteriormente, con esas claves, se *procede por analogía*, construyendo, (diseñando, elaborando), en otro contexto (más general o más concreto, generalizando o particularizando) otra entidad análoga, que mantiene las características de la primera, adaptadas al nuevo contexto.

De este uso se deriva el siguiente resultado: el *proceder por analogía* no siempre asegura que la entidad resultante sea análoga a la inicial. Por ejemplo, si definimos la suma en el conjunto Q análogamente a como se define el producto; es decir, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, el resultado no es coherente (genera contradicciones). Por tanto, esa definición es análoga al producto, pero no es la suma tradicional y no tiene ningún interés. Lo mismo pasa con el producto en el conjunto de nº complejos C, si lo definimos análogamente a la suma en C. Este uso se podría denominar por lo que lo caracteriza: *proceder por analogía*

> Uso 2. En éste, se parte de dos entidades o ideas matemáticas (conceptos, fórmulas, estrategias u otros procedimientos, demostraciones, resultados, modelos, estructuras, etc.) y se procede en los dos pasos siguientes (se puede dar sólo el primero o los dos):
>
> > 2A. En primer lugar se comparan entre sí, eligiendo unos criterios, para detectar y establecer todas las posibles similitudes y características comunes entre ellas, mediante un análisis comparativo. Cuando se descubre la estructura común subyacente a ambas, independiente de sus contextos, es cuando se establece la analogía y se dice que, para esos criterios, las dos entidades son análogas. Esto sería *establecer analogías.* Si no se descubre o no la tienen, se dirá que no son análogas.
> >
> > 2B. En una segunda fase, no obligatoria, se da un paso más. A la luz de las similitudes encontradas se *procede por analogía* para construir otra entidad del mismo tipo, situada en un contexto más general o más concreto, generalizando o particularizando, según el caso, las entidades que se tenían inicialmente.

De este uso se deriva el resultado siguiente: la analogía no siempre va en la dirección de la generalización, hacía lo más abstracto. Un ejemplo de ello es cuando, a partir de la fórmula del término general, o de la suma de los elementos de una RA2D, se particulariza y se obtienen las expresiones análogas para las p.a. tradicionales. Este uso podría denominarse por lo que lo caracteriza: *estableciendo analogías - procediendo por analogía.*

Hay una cuestión importante, que es común a los dos usos de la analogía, que está relacionada con una parte de la pregunta de investigación, que debe ser contestada explícitamente ahora: ¿la analogía es un catalizador? Después del análisis se puede afirmar que lo será cuando facilite que el *proceder por analogía* (la construcción en el nuevo contexto) concluya con éxito y sea eficaz. ¿Y cuándo se tiene la seguridad de ello? Cuando el proceso de identificación (del paso 1 de cada uno de los usos) sea completo y detecte las características esenciales de la/s entidad/es analizada/s. Entonces es cuando la analogía facilita el paso de un contexto a otro, utilizando como guías las características detectadas.

Estos primeros resultados sobre los usos y el papel de la analogía, expuestos en forma esquemática, se intentarán madurar para el capítulo de resultados.

Con todo lo anterior, es lógico pensar que se ha contestado suficientemente a la pregunta 2.2 del problema de investigación, que se recordaba su enunciado al comienzo de este apartado.

CAPÍTULO 7. LOS PIM Y LOS CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR

7.1. PRESENTACIÓN

La presentación del capítulo volverá a recordar las preguntas de investigación que se van a tratar en él, la parte del marco teórico general que se va a utilizar y, por último, la contextualización de los instrumentos que se van a utilizar para el análisis.

7.1.1. Preguntas de investigación

Dentro del enunciado del problema de investigación, la parte que hace referencia a los conocimientos del profesor, dice lo siguiente:

> *El profesor se sitúa, en el desarrollo del PIM y en la revisión del informe científico del estudiante, con sus conocimientos de contenido y didácticos de contenido. En algunos casos, además, el propio profesor elabora un informe sobre el PIM desarrollado por los estudiantes, analizando y valorando el desarrollo del mismo.*
>
> *¿Pueden modificarse los conocimientos del profesor mediante el análisis de un PIM? ¿Qué tipo de modificaciones se pueden producir?*

Estas preguntas, que conforman la cuestión 3.1. del problema de investigación, son las que se van a abordar en este capítulo. La búsqueda de respuestas a ellas será el objetivo a perseguir. A este respecto, debe tenerse en cuenta que:

1. Se trata de constatar si el análisis de un PIM por el profesor puede generar cambios en sus conocimientos. Esos cambios estarán relacionados con los contenidos matemáticos del PIM analizados o con aspectos más profundos de los conocimientos del profesor, que se “remueven” en la mente del profesor, al analizar el PIM.
2. No se tendrán en cuenta el marco teórico de conocimientos que el profesor necesita y utiliza para llevar a cabo el análisis del PIM. Este marco teórico puede favorecer y facilitar esos cambios en sus conocimientos, porque hacen más riguroso y eficaz el análisis, pero las modificaciones y cambios que se quieren detectar son los producidos por los contenidos del PIM que se concretan en el informe del estudiante.

La primera parte de la pregunta de investigación, el análisis del PIM, se puede llevar a cabo mediante un proceso de Génesis Documental en una actividad mediada por los instrumentos siguientes: informe del estudiante y, en algunos casos, el informe del profesor. Este análisis dará las claves de los tipos de modificaciones que se pueden producir en los conocimientos del profesor. Estas ideas se desarrollan a continuación.

7.1.2. Marco teórico

Del marco teórico global de la tesis, para este capítulo, se utilizará el Caso 2, de las actividades mediadas por un instrumento, tanto si el instrumento es el informe del profesor como si es el del estudiante.

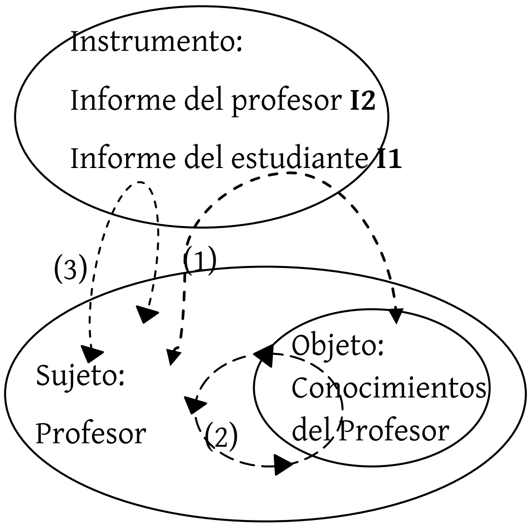


Figura 7.1. Caso 2 de actividades mediadas.

El Caso 2 se representa en la Figura 7.1 y en ella se puede observar que: a) el sujeto es el profesor; b) el instrumento puede ser el informe del profesor (que denominaremos **I2** (Informe nº 2), o el informe del estudiante. La estructura de artefacto es el documento escrito, con sus códigos, símbolos, etc., en el que se concreta el informe y la estructura psicológica o esquema asociado es el conjunto de saberes del profesor, marco teórico en acción, utilizado a la hora de elaborar o analizar el informe, según el caso; c) el objeto es el análisis, explicitación y concreción del modelo de conocimientos que tiene el profesor, por lo que el objeto de la actividad mediada es una parte del sujeto.

Como puede observarse en la figura 7.1 en el Caso 2 hay actividad mediada entre el sujeto y el objeto a través del instrumento (denotadas por 1); hay mediaciones entre el sujeto y el objeto, no mediadas a través del instrumento (denotadas por 2) y, por último, hay actividad mediada entre el sujeto y el instrumento (denotadas por 3). Se presentan todas en las tablas 7.2. y 7.3.

CASO 2. MEDIACIONES SUJETO-OBJETO		
MEDIACIONES EPISTÉMICAS	MEDIACIONES PRAGMÁTICAS	MEDIACIONES HEURÍSTICAS
-Conocimiento de los subdominios del modelo de conocimientos del profesor, en relación con el tema de trabajo del PIM. -Conocer el marco de conocimientos del profesor, necesarios para el desarrollo del PIM	-Eficacia del modelo de conocimientos del profesor para explicar el desarrollo del PIM y los resultados del estudiante; es decir, si explican las situaciones y orientan el trabajo del estudiante. - Identificación de ideas del estudiante (conceptos, métodos, enfoques, etc.) no contemplados en el modelo de conocimientos del profesor ni previstos por él (por su alto o bajo nivel idoneidad, eficacia, originalidad, etc.) - Detección de conflictos cognitivos y desajustes en los conocimientos del profesor, de contenido y didácticos de contenidos: conocimientos ineficaces, parcialmente inadecuados, erróneos, nuevos, etc. - Detección de desajustes en las creencias del profesor	- Constatación, mediante la reflexión, el análisis y la comparación, de las diferencias de los conocimientos del profesor con el modelo teórico. - Elaboración de anotaciones, valoraciones, etc. de todo ello. -Toma de decisiones sobre los conflictos cognitivos detectados, teniendo en cuenta las creencias del profesor. -Propuestas de consolidación o modificación de modelo de conocimientos del profesor: a) Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces, que explican adecuadamente las situaciones. b) Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.) c) Modificación de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos d) Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos e) Consolidación o modificación de las creencias del profesor.

Tabla 7.2. Caso 2. Actividad mediada Sujeto-Objeto

CASO 2. MEDIACIONES SUJETO-INSTRUMENTO		
MEDIACIONES EPISTÉMICAS	MEDIACIONES PRAGMÁTICAS	MEDIACIONES HEURÍSTICAS
- Conocimiento de la estructura artefacto del instrumento (informe del profesor): códigos utilizados, símbolos y notaciones, etc. -Conocimiento del esquema asociado al instrumento (modelo teórico): asignación de subdominios a los conocimientos de contenido y pedagógicos de contenido del PIM; encuadre de los conocimientos en los subdominios - Conocimiento profundo del objeto de la actividad	- Identificar aspectos del informe del profesor que no expliquen de manera adecuada las tareas y situaciones del estudiante. - Identificar conocimientos de los dominios de los modelos teórico que se pueden encuadrar en más de un subdominio del mismo dominio - Identificar conocimientos de un dominio que también se pueden encuadrar en otro dominio - Detección del nivel de eficacia y adecuación del instrumento (artefacto y esquema asociado) para orientar al profesor hacia la meta: la identificación y mejora de su modelo de conocimientos	- Elaboración de anotaciones, comentarios y valoraciones en el informe del profesor o del estudiante, según el caso. - Contextualización del modelo de conocimientos del profesor a los contenidos matemáticos del PIM y a las situaciones y tareas del estudiante. - Toma de decisiones sobre las modificaciones y mejoras a introducir en el informe del profesor o del estudiante, según el caso. -Toma de decisiones sobre la asignación de subdominios (dentro del modelo teórico) a los conocimientos del profesor que aparecen, teniendo en cuenta sus creencias.

Tabla 7.3 Caso 2. Actividad mediada Sujeto-Instrumento

Antes de finalizar la descripción del Caso 2, es necesario señalar que admite una variante (véase la figura 7.4). En ella el sujeto de la actividad mediada es el investigador, que se plantea como objeto (meta) el conocimiento y estudio del sistema de conocimientos del profesor, siendo éste último el otro sujeto de la actividad.

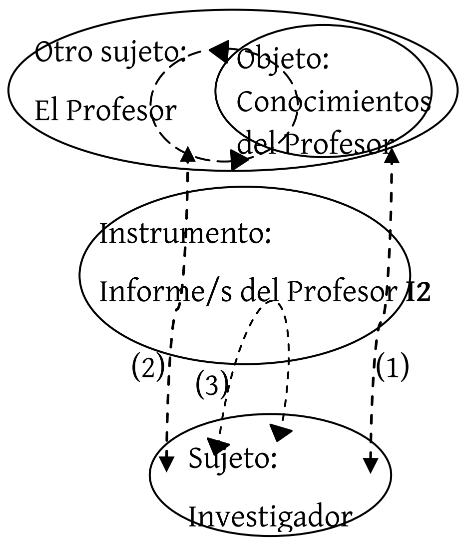


Figura 7.4. Variante del Caso 2

Como es lógico, tanto en el Caso 2 como en esta variante, el instrumento y el objeto de la actividad coinciden, no así el sujeto, que en uno es el propio profesor y en el otro es el investigador. Esta variante añade versatilidad a la validez del Caso 2 como instrumento para el análisis.

Por otra parte, el enfoque documental está muy relacionado con los cambios en los conocimientos del profesor, a través de la *función constructiva* o *instrumentación.* Reproducimos la exposición hecha en el capítulo 3 (punto 3.3.2):

El *enfoque documental* también focaliza su atención en el análisis del trabajo del profesor, a partir de su función productiva. Para una clase de situaciones, reúne los recursos, los trabaja, elaborando un material de enseñanza que pone en práctica en

> su clase. Esta puesta en práctica no es un acto único, sucederá de nuevo con otros estudiantes y en otros cursos académicos. En varios momentos de esta elaboración y de estas implementaciones, llevará a cabo cambios: en un movimiento de *instrumentalización*, los recursos involucrados son constantemente revisados por el profesor; en un movimiento de *instrumentación*, los conocimientos del profesor son cuestionados por los recursos, por su puesta en práctica y por los efectos que conllevan (Gueudet y Trouche, 2010b, p. 5).
>
> De esta forma, la actividad productiva del profesor es también una actividad constructiva (Samurçay y Rabardel, 2004) pues no se limita a producir transformaciones de objetos del mundo exterior (concretamente los recursos en documentos), sino que, también, él mismo se transforma, enriqueciendo su repertorio de recursos y de conocimientos, tanto de *contenido* como *didácticos de contenido*; es decir, el profesor aprende de lo que enseña; esta es la función constructiva de la actividad (Rabardel y Pastré, 2005).
>
> Por otra parte, durante el proceso en el que surgen las funciones constructivas, el profesor lleva a cabo una *internalización* (Wertsch, 1998) que no es siempre observable desde el exterior, ni verbalizable por su parte. Esto mismo ocurre con la instrumentalización, en la que, además, no necesariamente tiene consecuencias inmediatas. Es por ello que es necesario *mirar el trabajo invisible* (Blombreg y otros, 1996). Pero además de ser difíciles de ver, no todos los componentes de las funciones de instrumentación e instrumentalización son directamente verbalizables. Esto es particularmente cierto en el caso de los *esquemas* que, en el enfoque instrumental o documental, debe ser tenido en cuenta. La *acción* es un conocimiento que moviliza el '"conocimiento ya incorporado", y esto es mucho más que verbalizar (Leplat, 2000). Esta dimensión también se aplica a los esquemas cuando se sustentan en *invariantes operacionales* (Vergnaud, 1996) que se encuentren implícitos en el sujeto y no se hayan exteriorizado.

Esta mirada al *trabajo invisible* es la que facilitan las *mediaciones heurísticas* en el proceso de interacción entre el sujeto (profesor) y el instrumento, en la búsqueda de los *invariantes operacionales* o *conocimientos en acción* del profesor (Ver Fig. 4.6. en la página siguiente). Téngase en cuenta que las acciones heurísticas parten del sujeto y vuelven hacia él; es ahí donde radica su utilidad y eficacia para hacer aflorar los *conocimientos en acción* del profesor.

Vuelve a ponerse de manifiesto la relación entre la *Génesis Documental* y las mediaciones *heurísticas,* presentada en el capítulo 4, apartado 4.3.3. Estas conexiones potencian la función *constructiva* o *instrumental* (recursos-sujeto) y las mediaciones heurísticas (sujeto-instrumento-sujeto) para la identificación de los cambios en los conocimientos del sujeto (profesor).

El proceso de transformación de los recursos en documento se desarrolla de manera iterativa, como plantean Gueudet y Trouche, (2010, p. 2) en la Figura 3.4 del capítulo 3; es decir, que la transformación se plantea como un proceso que se repite en el transcurso del tiempo (ver flecha del tiempo en la figura 3.4).

El propio proceso permite que, en cualquier momento del mismo, puedan producirse las mediaciones heurísticas, de manera que si se focaliza la atención en los conocimientos del profesor, se pueden identificar los *invariantes operacionales* o conocimientos en acción del profesor

En cuanto al encuadre de los conocimientos del profesor que surjan en la génesis

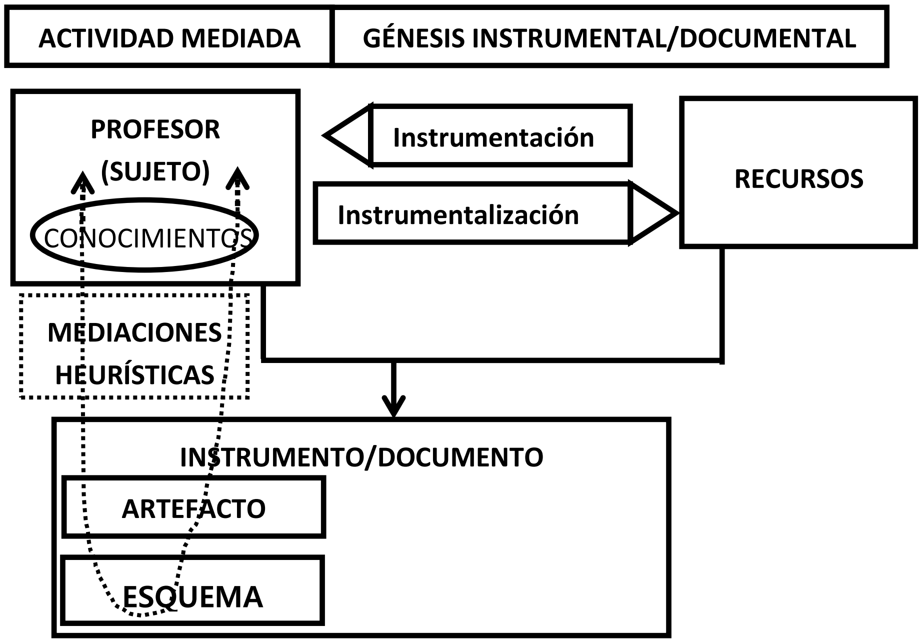


Figura 4.6. Conexiones entre la Génesis Documental y las mediaciones heurísticas

documental, la conceptualización teórica se apoyará en el modelo de Shulman (1986) y las aportaciones posteriores de Ball, Thames y Phelps (2008). Por último, junto a los conocimientos del profesor, ocupan un lugar importante las creencias. Para apoyar conceptualmente su encuadre cuando se identifiquen en el análisis de los episodios, se utilizará el modelo MTSK como marco de referencia, que contempla, junto a los dominios y subdominios de conocimientos, las creencias del profesor.

7.1.3. Contextualización de la experimentación.

La pregunta de investigación que se plantea en este capítulo implica la identificación de las modificaciones de los conocimientos del profesor, por lo que, en el análisis que se va a realizar dentro del Caso 2, se deben priorizar las mediaciones heurísticas, que son las que se dirigen hacia el sujeto mismo y que conllevan la toma de decisiones sobre sus conocimientos. Por tanto, las mediaciones que adquieren protagonismo en este capítulo son las heurísticas en relación con el tema de análisis: los conocimientos del profesor.

En el análisis se presentarán dos PIM:

1. El PIM de la estudiante P.I., documento TN-PI-09, que ya se ha utilizado en anteriores capítulos, pero en este capítulo con una variante: el informe que se va a analizar es el del profesor (tuvimos la oportunidad de someterlo al juicio de expertos en el IV Simposium Internacional ETM celebrado en El Escorial en julio

de 2014 y cuya discusión fue de interés para lo que a continuación se presenta). El documento refleja los conocimientos explícitos e implícitos (en acción) del profesor, siendo un instrumento adecuado para poner de manifiesto los invariantes operacionales, de los esquemas del profesor, contenidos en el instrumento.

2. El PIM realizado por dos estudiantes de ESO sobre el mismo tema que el anterior, las redes aritméticas en el espacio. En este caso, el instrumento para el análisis será el informe científico de los estudiantes, que recoge el proceso y los resultados del PIM.

Como en los capítulos anteriores, se presentan los datos de los trabajos en la tabla 7.5.

TÍTULO DEL TRABAJO	DOCUMENTO	INSTRUMENTO
PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN EL ESPACIO	IP-ETM ANEXO 7	INFORME DEL PROFESOR
REDES ARITMÉTICAS	RA–AB ANEXO 8	INFORME DE LOS ESTUDIANTES

Tabla 7.5. Datos de los PIM a analizar.

MEDIACIONES	RESULTADOS ESPERADOS
HACIA EL PROFESOR (HEURÍSTICAS)	- Constatar que los conocimientos del profesor pueden cambiar en el transcurso de la realización de un PIM por los estudiantes. - Detectar conflictos cognitivos, teniendo en cuenta las creencias del profesor, entre sus conocimientos y los que se generan o aparecen en los PIM -Proponer la consolidación, modificación o sustitución de alguna idea del marco de conocimientos (de contenido y didácticos de contenido) del profesor, de alguna de las formas siguientes: a) Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces porque explican adecuadamente las situaciones. b) Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.) c) Modificación y/o sustitución de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos d) Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos e) Consolidación o modificación de las creencias del profesor.

Tabla 7.6. Resultados esperados sobre los conocimientos del profesor.

En el capítulo 4 de esta tesis, Metodología y Contextualización, se presentaban los resultados esperados de la experimentación (punto 4.3.3). Se recuerdan en la tabla 7.6.

7.2. ANÁLISIS DEL INFORME DEL PROFESOR

El informe del profesor, denominado IP-ETM, contiene un análisis de una parte del PIM desarrollado por la estudiante P.I. en el documento TN-PI. El citado análisis se centra en el papel de los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la prueba, que constituye parte del contenido desarrollado en el capítulo 6 de este trabajo de tesis.

El informe del profesor tiene una parte que contiene el marco teórico utilizado por él para analizar el PIM de la estudiante. Estos conocimientos no van a ser tenidos en cuenta, como se ha comentado en el primer punto del capítulo.

Antes de pasar al análisis del informe, conviene tener en cuenta que se basa en el análisis hecho previamente por el profesor al informe de la estudiante. Lo que se busca en el informe del profesor es:

A) Identificar en el trabajo de la estudiante determinadas ideas del marco de conocimientos del profesor o que sean coherentes con ese marco;

B) Encuadrar, situar y explicar el trabajo de la estudiante de acuerdo con el marco teórico de conocimientos del profesor, reforzando y consolidando aspectos significativos;

C) Detectar desajustes entre las partes del trabajo de la estudiante, contenidas en el informe que: 1) no se explican totalmente con las ideas del marco teórico, que no son explicadas ni parcialmente o que generan contradicciones o,; 2) generan conflicto con los conocimientos y/o creencias del profesor (ya sean verdaderos o erróneos)

Para el análisis del informe del profesor, se han elegido unos pasajes del mismo, en los que aparecen cuestiones relacionadas con el tema a tratar. Como todos los pasajes del informe hacen referencia a algún momento del desarrollo del PIM por la estudiante, sólo se mencionará su localización en el informe del profesor, no en el informe de la estudiante.

Aunque sea reiterativo, se debe remarcar que las mediaciones que se van a priorizar en este análisis son las heurísticas, por lo que casi siempre habrá referencias al pensamiento del sujeto, en este caso el profesor, sobre sus conocimientos. Esta circunstancia hace que el análisis tenga unas peculiaridades que no aparecían en los anteriores.

7.2.1. El caso de los cuatro elementos

En el documento TN-PI, o en el informe del profesor, IP-ETM, Anexo 7, p. 391 (en el resto sólo se mencionarán la pág. del informe del profesor) aparece el episodio de la estudiante (en letra cursiva):

Dados unos números a, b, c, d arbitrarios, ¿podemos construir un cuadrado de cualquier dimensión, o incluso un rectángulo, verificando que sus filas y columnas son progresiones aritméticas?

a+b	a+b+c+d

a	a+c

Fig. 15

Está claro que en esa situación (Fíg. 15) sí tiene contestación afirmativa la pregunta anterior. Además si a, b, c, d son enteros, entonces el cuadrado resulta de números enteros.

En el informe del profesor, IP-ETM (Anexo 7, p. 391), éste comenta (letra no cursiva):

… resulta curioso que PI no haya resuelto la pregunta presentando la solución más sencilla, por ejemplo (Ejemplo 2A):

b	d
a	c

O mediante la solución que se obtiene a partir de la última colocación, en la que, repitiendo el procedimiento para interpolar medios aritméticos, podríamos completar las filas y columnas (Ejemplo 2B) :

b	…	…	…	…	d
…					…
…					…
a	…	…	…	…	c

Por tanto, es sencillo completar una tabla de las del problema inicial si conocemos cuatro elementos como los anteriores, situados en dos filas y dos columnas consecutivas, como en el primer ejemplo, o no consecutivas, como hemos propuesto en el último ejemplo.

¿Qué pasa por la cabeza del profesor cuando escribe esto? El profesor esperaba que el ejemplo 2A es el que iba a presentar la estudiante, por su sencillez y por ser la opción más sencilla. Y se da la circunstancia de que en el transcurso del análisis del episodio de la estudiante (durante la elaboración del informe del profesor), éste descubre el ejemplo 2B, en el que él no había pensado, que también sirve para resolver la cuestión planteada.

Por tanto el profesor descubre otras soluciones al problema planteado. La solución del ejemplo 2B es una generalización de la solución dada en el ejemplo 2A. Es una generalización del *patrón de resultados* del ejemplo 2A. Por ello sería un ejemplo de un conocimiento nuevo, concreto, del profesor, surgido en el transcurso del análisis. Si el profesor no hubiera vuelto a profundizar en el informe de la estudiante, no lo habría percibido.

Este nuevo conocimiento surge al intentar explicar las razones por las que la estudiante no ha presentado la solución que el profesor esperaba. Este pequeño conflicto cognitivo, que surge en la mente del profesor, ha hecho que el profesor se planteara ¿qué otras posibilidades diferentes a la esperada por él podrían presentarse? Este análisis le ha proporcionado otras soluciones alternativas, entre ellas la del ejemplo 2B. Por tanto, es un momento de aprendizaje para el profesor. Este nuevo conocimiento, que completa los conocimientos del profesor en ese aspecto concreto, es de tipo práctico pero del dominio del conocimiento matemático, no es un conocimiento didáctico.

Pero esto no termina aquí, pues el informe continúa (Anexo 7, p. 393):

> Profundizando en el análisis de las características de los ejemplos anteriores, vemos que no se pueden encuadrar completamente en la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001), ya que, aunque tienen algunas coincidencias con ellos, también mantienen varias diferencias:
> a) Ejemplifican una estructura general, abstracta, pero esa idea no está subyacente como en los *ejemplos genéricos* sino que aparece explícita en los ejemplos.
> b) No conectan el dominio aritmético con el algebraico, sino que se mantienen en este último.
> c) Tienen un carácter ambivalente. Son casos particulares de la tabla de números, pero no son ejemplos concretos, sino que representan una familia de casos (uno para cada cuarteto de valores de a, b, c, d). Si nos ceñimos al contexto: *lugares que ocupan los elementos en la tabla* o *posiciones de los elementos en la tabla,* y tomamos esta variable como criterio, entonces son casos particulares o *ejemplos genéricos;* pero en el contexto: *valores numéricos de los elementos de la tabla,* para este criterio, son casos generales, no son ejemplos concretos ni *genéricos.* Tenemos, por tanto, que son ejemplos particulares y generales a la vez, según el contexto en el que los situemos y el criterio con el que los analicemos.
> Surgen de este modo un tipo de ejemplos genéricos nuevos que denominaremos *ejemplo (o caso particular) de tipo general y genérico* (se amplía esta idea en el Episodio 3). Son casos particulares de una situación general, pero, a su vez, son casos generales de una idea más concreta; siempre expresarán explícitamente una idea abstracta y, por tanto, englobarán otros casos particulares que lo pueden concretar.
> Una de las características de los tres *ejemplos de tipo general y genérico* vistos en el episodio es que configuran sendas demostraciones de existencia por construcción; es decir, que sirven para demostrar la veracidad de la conjetura planteada, a semejanza de lo que ocurre con los *ejemplos genéricos.*

El profesor detecta que los conocimientos que utiliza (concepto de ejemplo genérico), para analizar y entender lo que hace la estudiante, no sirven para explicar los ejemplos que tiene delante (de la estudiante y suyos). Ante esto, justifica la insuficiencia de sus conocimientos y esboza la construcción de un nuevo concepto que dé cobertura a los ejemplos. Otra circunstancia que se da gracias a que el profesor analiza el PIM, en caso contrario todo lo pasaría por alto.

Más adelante, en IP-ETM (Anexo 7, p. 400-401) se concreta esta nueva idea, con un esquema de la tipología de ejemplos o casos particulares. No se presenta porque no añade nada nuevo a lo ya expuesto, pero puede consultarse en las páginas mencionadas del documento.

Para completar el análisis relativo a los ejemplos, en IP-ETM (Anexo 7, p. 400), el profesor comenta:

> … la diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que se puede observar si se dejan a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa.

Sobre esta idea, que es un conocimiento de la práctica matemática de los profesores, se debe aclarar que la idea de ejemplo genérico es subjetiva, porque lo que para una persona es un ejemplo genérico puede no serlo para otra. Si la persona ve la estructura subyacente, es genérico, pero si no la ve, aunque la tenga, para él no es genérico. Es similar a la idea de ejercicio y problema matemático.

En este caso el análisis sirve para consolidar en el profesor el conocimiento que ya tenía sobre la subjetividad de la idea conceptual de ejemplo genérico.

Por todo lo anterior, queda claro que estas actividades mediadas por el instrumento se consolidan como un instrumento potente. Todo lo que surge es fruto de la actividad mediada en su vertiente heurística.

7.2.2. Sobre el tipo de información

Se prosigue el análisis con otro pasaje interesante, en IP-ETM (Anexo 7, p. 394). Surge de las palabras de la estudiante:

> Podemos poner cualquier valor con tal de que no sean redundantes o insuficientes, como por ejemplo:
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | | | | |
> | 2 | 4 | 6 | 8 |
>
> *Si nos dan estos cuatro valores, situados en la misma fila, no podríamos obtener el cuadrado* [una tabla única], *pues en definitiva sólo nos han dado dos valores independientes.*

Sobre estas frases de la estudiante, el profesor comenta lo siguiente (IP-ETM, Anexo 7, pág. 395):

> Resulta muy ilustrativo el uso que hace la estudiante de las ideas de *valores redundantes, insuficientes o contradictorios;* es decir, para completar de forma única una línea de la tabla, basta con conocer dos elementos cualesquiera de ella. Conocer más de dos implica que hay información redundante o contradictoria, conocer menos de dos significa que la información es insuficiente.
> Por esta causa, en el ejemplo genérico anterior, observamos que la información es redundante; es decir, podemos considerar dos cualesquiera de los elementos dados *independientes* y los demás los podemos deducir de esos dos. Esta idea general o *estructura subyacente,* descubierta por la estudiante en el ejemplo, es la que sirve para argumentar y demostrar que, en los casos análogos a ese, se puede

completar la tabla, pero no de forma única. Todo ello refuerza la importancia de los ejemplos genéricos.

Es claro que el profesor necesita tener, entre sus conocimientos, las ideas de información insuficiente, redundante y contradictoria, porque forma parte importante de la estructura de determinado conocimiento matemático, concretamente el de los tipos de datos en un enunciado matemático, tipos de enunciados, tipos de ejemplos en relación con la elaboración de conjeturas, etc.

También podría formar parte de los conocimientos necesarios para el profesor sobre la idea y estructura de una demostración de un teorema, o de la resolución de un problema, pues la información contenida en el enunciado, hipótesis (para el teorema) o datos (para el problema) tiene un determinado carácter y una determinada estructura, en función de la cual el problema tiene una, mucha o ninguna solución, o el teorema es cierto o es falso, está bien enunciado o hay que modificar sus hipótesis.

De lo anterior se infiere que este conocimiento es del ámbito matemático, de su práctica. Pero cuando el profesor proyecta esos conocimientos hacia el estudiante, a través de su propuesta de enseñanza, pasan a ser un conocimiento didáctico, porque la actividad de analizar el tipo de información de un enunciado forma parte de una estrategia para fomentar determinados aprendizajes del estudiante sobre las ideas de: tipos de enunciados matemáticos; carácter de la información en un enunciado y su relación con el número de soluciones que se obtienen; papel de los ejemplos en la elaboración de conjeturas y su demostración, etc.

En este ejemplo el profesor ya era consciente de estas cuestiones y tenía estas ideas entre sus conocimientos. Lo que ocurre, por tanto, no es una modificación de sus conocimientos, sino más bien un reforzamiento de la importancia y validez de los mismos. En este caso la actividad mediada por el instrumento ha servido al profesor para identificar unas ideas de su marco teórico y reforzarlas, consolidarlas más y reconocer su importancia.

A la vista de lo anterior, el informe continúa, y en IP-ETM, anexo 7, p. 395, plantea:

De ahí que parezca natural empezar a pensar que los elementos deban estar en filas y columnas diferentes, para ver si así son *independientes* y nos permiten completar la tabla de forma única, como ocurría en el problema inicial.

Por todo lo anterior, P.I. modifica la conjetura y la transforma en: sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.

Como la demostración de esta conjetura conlleva unas *formas de expresión* que se salen del *alcance conceptual* de la estudiante, vuelve a tomar un caso particular general de la misma, para ver si obtiene algún resultado interesante.

Vuelve a darse aquí una situación nueva para los conocimientos del profesor. El último de los párrafos anteriores viene a decir que la estudiante no puede demostrar la conjetura porque se sale de sus posibilidades, con el nivel conceptual que tiene. La estudiante cursaba entonces 2º de Bachillerato y el problema consiste en la resolución de un sistema lineal de ecuaciones en el que todos los coeficientes de las tres incógnitas son expresiones literales, parámetros. Esto sí excede el nivel de sus posibilidades.

Pero, como se va a poder ver en la segunda parte de este capítulo, en otra iteración posterior de la experimentación con este tema de redes aritméticas, dos estudiantes de 4º curso de ESO, resuelven el mismo problema utilizando una sola incógnita. Esta idea era completamente insospechada para el profesor y nunca había pensado que se podría presentar.

Por tanto, lo que le había pasado a la estudiante es que su estrategia, aunque era válida, no era la más adecuada para su nivel conceptual; en cambio la de los dos estudiantes de un nivel académico muy inferior, sí era válida y adecuada para su nivel.

Estamos ante un conocimiento didáctico del profesor, relacionado con el currículo (aprendizaje y estándares de evaluación) que el profesor tenía claro hasta el momento en que ha podido ver que la demostración de la conjetura sí está al alcance conceptual de la estudiante si se plantea como lo han hecho otros estudiantes de un nivel educativo más elemental. Por tanto, puede ocurrir que la mediación heurística que se produce en el análisis de la actividad mediada puede llevar a perpetuar o consolidar conocimientos erróneos del profesor, porque ese conocimiento se sustenta en una creencia sobre el conocimiento matemático, más que en un conocimiento firmemente contrastado. ¿El problema se puede resolver de otra manera? El profesor piensa, cree que no, y el análisis le refuerza ese conocimiento, porque él toma decisiones basándose en lo que tiene en ese momento: una creencia matemática. Esto es muy importante tenerlo presente.

7.2.3. Los razonamientos plausibles

Se analizará ahora otro episodio en el que los razonamientos pueden modificar los conocimientos del profesor. Concretamente aparece en IP-ETM, Anexo 7, p. 402, cuando el profesor, después de analizar el informe de la estudiante plantea, en las conclusiones del análisis:

> Así mismo, se ha identificado un *patrón de razonamiento plausible* (Polya, 1966, p. 281-341), que constituye una variante del presentado por Polya (1966) y que podemos enunciar de la siguiente manera: Sean C, C_1, C_2, …, C_n conjeturas, de tal forma que se cumple que $C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \dots, n$. Supongamos que C_1 es falsa y que C_2, C_3, …, C_n son verdaderas. Construimos otra conjetura D, modificando las condiciones de C, acercándolas a las de alguna de las $C_i\ ,\ i = 2, \dots, n$; de forma que $D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$. Con estas condiciones, se cumple que C es falsa y D es *un poco (o mucho) más digna de crédito, en función de las semejanzas (o diferencias) que existan entre C_2, C_3, …, C_n*. Este razonamiento abductivo (Peirce, 1960) lo podemos modelar de manera análoga a como hace Polya (1954, 1966(traducción española)) en sus patrones de razonamiento plausible:

$$C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
$$C_1 \text{ es falsa}$$
$$C_i\ , \forall i = 2, 3, \ldots, n \text{ son verdaderas y semejantes (ó diferentes) entre sí}$$
$$D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \ldots, n$$

C es falsa y *D* es más (ó mucho más) digna de crédito

Por tanto, el análisis realizado ha permitido identificar una variante de uno de los patrones de razonamiento plausible.

Este es un nuevo conocimiento generado a partir de la actividad mediada, en el análisis de introspección del profesor, durante la mediación de tipo heurístico. Este es un conocimiento matemático relacionado con la estructura del conocimiento matemático y puede ayudar a entender mejor cómo se demuestra, o cómo se trabaja en procesos de descubrimiento, de resolución de problemas, al trabajar con conjeturas. Es un *patrón de razonamiento plausible,* como los de Polya y añade una cualificación a su *patrón fundamental inductivo.* El profesor lo ha modelado como los ha visto modelados otros similares en documentos de Polya. Por tanto, si es aceptado por la comunidad científica, este es un nuevo conocimiento para el profesor y para el resto.

Lo importante es, en el contexto de este capítulo, que es el resultado de las mediaciones heurísticas realizadas en el análisis del instrumento.

En este caso no se ha obtenido de la literatura existente, sino que se ha generado después de ver que no figuraba en ella (al menos en la consultada).

Para su justificación, se ha utilizado el marco teórico conocido (los patrones de razonamiento de Polya) para modelarlo de una forma similar a como lo hizo Polya, utilizándose una forma de representación análoga a la habitual.

7.3. ANÁLISIS DEL INFORME DE LOS ESTUDIANTES

Como complemento al enfoque del punto anterior, se planteará el estudio de las modificaciones en los conocimientos del profesor, mediante el estudio del informe de dos estudiantes que realizaron un PIM en pequeño grupo con el mismo tema que algunos anteriores: las redes aritméticas.

En este caso se procederá como en el anterior, con la diferencia de que es el análisis del profesor, con las mediaciones heurísticas, el que va a identificar los cambios en sus conocimientos. Para ello, se seleccionarán algunos episodios del informe, aquellos que estén más relacionados con el tema de trabajo.

7.3.1. Compleción de una red aritmética bidimensional

El documento con el informe de los estudiantes es el RA-AB. En este pasaje, se centrará el análisis en el punto 4.1 y 4.2 del documento, (Anexo 8, p. 412-413) del mismo.

Los estudiantes demuestran que dados tres elementos situados en la tabla, se puede completar de más de una manera. Esto lo consiguen desglosando el proceso en dos casos y demostrándolo para cada uno de ellos. Posteriormente se proponen estudiar la compleción de la tabla para el caso en que se tengan cuatro elementos conocidos en ella. Allí se puede leer (Anexo 8, p. 413):

Aunque el siguiente apartado se pueda solucionar con un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, hemos preferido buscar un camino, que nos llevara a la misma solución, con el empleo de una sola incógnita.

4.2._ Teorema 6: la condición suficiente y necesaria para que una tabla con cuatro elementos conocidos con coordenadas (a,b), (c,d), (e,f), (g,h) se pueda completar de forma única, es que se cumpla una de las fórmulas expuestas.

$$(c-a)(h-d)(g-e)(b-f)+(b-d)(e-a)(h-f)(e-c)\neq 0$$

O bien:

$$\frac{(c-a)(e-g)}{d-b}+\frac{(e-a)(g-c)}{f-b}\neq\frac{(g-a)(e-c)}{h-b}$$

En varios trabajos sobre la misma cuestión realizados en años anteriores, los estudiantes siempre habían utilizado una estrategia que consistía en resolver un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (eran estudiantes de 2º de Bach., que ya saben matrices y determinantes y sus aplicaciones a la resolución de sistemas lineales). Este era un hecho repetido varias veces, que había conseguido que, la creencia matemática inicial del profesor de que era el método habitual, se hubiera convertido en un conocimiento implícito para él surgido y asentado en esa creencia. La sorpresa surge cuando estos dos estudiantes de 4º de ESO, que no saben nada de matrices y determinantes, anuncian en su informe que lo resolverán con una sola incógnita.

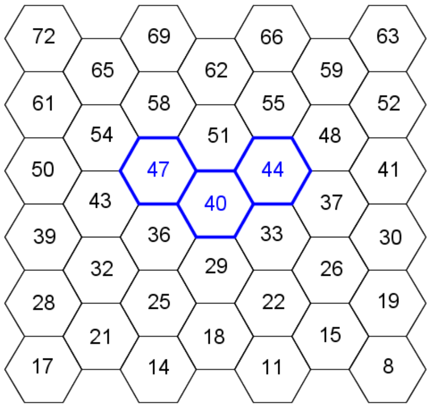
El proceso de resolución, que no tiene interés para lo que se analiza en este capítulo y no se presenta en el episodio, para no alargarlo en exceso, es correcto y ha propiciado un cambio en los conocimientos y creencias del profesor al respecto. Se produce, por tanto, la sustitución de una creencia matemática por otra. La primera se había convertido en conocimiento (parcialmente incorrecto), a base de repetirse varias veces. Esta creencia se sustituye por otra que engloba el método de resolución inicial y el nuevo, pero desecha la creencia de que el método anterior era el único.

De este episodio se puede sacar la conclusión de que el análisis de un PIM no sólo puede cambiar los conocimientos del profesor, como ha quedado patente en el apartado 7.2 de este capítulo, sino que también puede cambiar alguna de sus creencias y aquellos *conocimientos en acción* no explícitos, que no se sustentan en conocimientos científicos sino en creencias convertidas en conocimientos implícitos, que son total o parcialmente incorrectos.

Vuelve a quedar patente la eficacia de las mediaciones heurísticas para el análisis y toma de decisiones en el propio sujeto.

7.3.2. Las tablas aritméticas hexagonales

Se destaca ahora otro pasaje en el que los estudiantes, en su afán de plantear nuevos enfoques en el problema inicial, proponen abrir una línea nueva de trabajo, modificando la forma de las redes aritméticas. Este tema aparece en RA-AB (Anexo 8, p. 431) y comienza así:

> A continuación mostramos un ejemplo de este tipo de red:
>
> 
>
>
> Como se puede observar, cada hexágono de la red forma parte de tres p.a diferentes, según las direcciones anteriormente descritas.
>
> Veamos algunas propiedades que se cumplen, que nos han causado sorpresa por lo inesperadas.

Vuelve a ocurrir que, un tema que parecía muy asentado en los esquemas de conocimiento del profesor: progresiones aritméticas, redes multidimensionales, problemas de la suma, término general, interpolación, compleción, etc., da un giro, abriéndose una línea nueva de trabajo al modificarse lo que parecía asentado e inamovible: la forma de las casillas es siempre cuadrada.

Este enfoque vuelve a sorprender al profesor, produciendo una modificación en sus conocimientos en acción. En este caso, el conocimiento se podría enunciar de la siguiente manera: en un contexto adecuado, los estudiantes tienen la capacidad de sorprender y siempre pueden llegar más lejos de lo que el profesor se imagina. Este conocimiento se sustenta en una creencia epistémica del profesor que, por repetición, ha pasado a formar parte de sus conocimientos didácticos de contenido en relación con la capacidad de aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, el hecho en sí de plantear el estudio de redes hexagonales es un conocimiento de contenido, relacionado con las estrategias productivas y métodos de trabajo eficaces en el desarrollo de un proceso de descubrimiento e investigación; concretamente el establecimiento de conexiones entre contextos diferentes, relacionado con el *proceder por analogía* analizado en el capítulo 6. Como puede observarse, los PIM pueden ser uno tipo de tareas adecuados para que se desarrollen esas capacidades en los estudiantes.

La modificación producida, en este caso, ha sido de consolidación y refuerzo en los conocimientos de contenido matemático del profesor (las conexiones entre contextos) y en sus conocimientos didácticos de contenido (la capacidad de aprendizaje de los estudiantes), que se han presentado más arriba.

7.3.3. Un modelo matemático explicativo

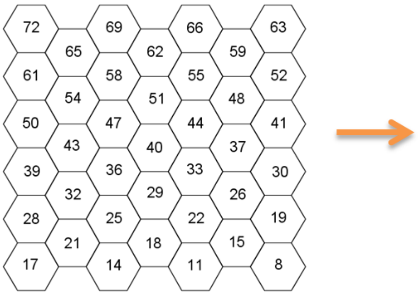
Se presenta a continuación un último episodio, en el que se produce un nuevo cambio en los conocimientos del profesor. En este caso tiene que ver con la construcción, por parte de los estudiantes, de un modelo matemático.

EPISODIO	DOMINIO DE CONOCIMIENTO	INVARIANTES OPERACIONALES	TIPO DE MODIFICACIÓN DE CONOCIMIENTOS
LOS CUATRO ELEMENTOS	- De contenido matemático - De contenido didáctico (aprendizaje)	-Concepto de ejemplo genérico -Estructuras subyacentes -Papel de los ejemplos genéricos en las conjeturas y su justificación	-Ampliación de los conocimientos del profesor - Reacomodación de los conocimientos ya existentes
TIPOS DE INFORMACIÓN	-De contenido matemático, ligado a su práctica -De contenido didáctico (currículo y estándares de aprendizaje)	-Carácter de la información contenida en los datos. -Número de soluciones en función del tipo de información - Nivel conceptual para la realización de una demostración o la resolución de un problema	-Consolidación y refuerzo de conocimientos anteriores -Consolidación de un conocimiento erróneo del profesor sustentado en una creencia.
PATRONES DE RAZONAMIENTO	- De contenido matemático (estructura del conocimiento matemático)	-Los razonamientos en un proceso de resolución de problemas o de demostración -Los patrones de razonamiento plausible	-Consolidación de conocimientos del profesor -Ampliación de los conocimientos por descubrimiento de uno nuevo -Reacomodación de conocimientos existentes.
COMPLECIÓN DE UNA TABLA BIDIMENSIONAL	- De contenido didáctico del contenido (currículo y estándares de aprendizaje) - Ceencias matemáticas, epistémicas y didácticas del profesor	-Nº de elementos para completar una tabla aritmética bidimensional -Creencias sobre la estrategia para la demostración -Los estándares de aprendizaje del currículo de cada nivel educativo	-Ampliación de los conocimientos del profesor - Reacomodación de los conocimientos ya existentes -Eliminación de creencias erróneas y conocimientos parcialmente incorrectos
TABLAS HEXAGONALES	-De contenido matemático. Estructura del proceso de descubrimiento	-Conexiones entre contextos en procesos de investigación -La capacidad de aprendizaje de los estudiantes	-Consolidación y refuerzo de conocimientos -Consolidación y refuerzo de creencias
EL MODELO MATEMÁTICO	- De contenido matemático. Modelización, representación, conexiones entre contextos	-Los modelos matemáticos como forma de representación y simbolización de ideas matemáticas -Conexiones entre contextos en procesos de investigación	-Ampliación de los conocimientos por aprendizaje de uno nuevo -Reacomodación de conocimientos existentes. -Consolidación de creencias

Tabla 7.7. Invariantes operacionales y tipos de modificación de conocimientos.

El contexto en el que se produce es el siguiente: al resolver el problema de la compleción de una tabla hexagonal de la que se conocen varios elementos, los estudiantes se plantean llevar a cabo la demostración de que si se conocen tres elementos de la tabla, se puede completar de forma única, si se cumple una determinada condición. El pasaje de interés aparece en RA-AB, Anexo 8, p. 433-434, y se sitúa exactamente cuando los estudiantes comienzan la demostración:

> Sin embargo, para nuestra demostración, con el fin de establecer las coordenadas de las casillas más fácilmente, hemos construido un "modelo matemático" que sirve para representar las redes hexagonales, y que consiste en una red con las casillas cuadradas en la que no todas las casillas están ocupadas. Hemos comprobado, para esta demostración, que tiene muchas ventajas el trabajar con ella, en vez de con los hexágonos. Además, en esta red, se visualiza muy bien la progresión aritmética horizontal de la que antes hemos hablado, que estaba escondida. Hemos coloreado de negro las casillas que están vacías. Puede verse en el ejemplo siguiente:



72		69		66		63
	65		62		59	
61		58		55		52
	54		51		48	
50		47		44		41
	43		40		37	
39		36		33		30
	32		29		26	
28		25		22		19
	21		18		15	
17		14		11		8

Este conocimiento de contenido matemático se puede encuadrar en los modos de representación de las ideas y contenidos matemáticos, dentro de un proceso de modelización. Los estudiantes, de entre 15 y 16 años, lo plantean con toda naturalidad porque tiene ventajas en el manejo de las tablas hexagonales y para el profesor era totalmente desconocido.

Vuelve a darse el refuerzo y consolidación de los conocimientos siguientes del profesor: a) el conocimiento de contenido comentado en el apartado anterior: el establecimiento

de conexiones entre contextos como estrategia productiva en un proceso de investigación; b) el conocimiento didáctico de contenido, también comentado en el apartado anterior: la capacidad de los estudiantes para aprender y sorprender al profesor.

Además de lo anterior, también se da el aprendizaje de un nuevo conocimiento de contenido: el propio modelo diseñado tiene interés para la demostración concreta de los estudiantes, pero también puede ser útil en otros contextos de resolución de problemas o de procesos de investigación o descubrimiento. Este conocimiento completa los que ya tenía sobre el tema y debe incorporarlo a sus esquemas.

7.4. ANÁLISIS CONJUNTO. PRIMEROS RESULTADOS

Para la realización del análisis conjunto, se necesita tener previamente, de cada uno de los episodios estudiados, las tablas de los *Dominios de organización* entre instrumentos y situaciones. Con el fin de no alargara en exceso el estudio, se presentan los *invariantes operacionales* de los *esquemas de conocimientos* del profesor en cada una de las situaciones y tareas identificados en cada episodio (tabla 7.7.). Posteriormente se realizará el análisis conjunto.

Para el análisis conjunto, se estudiará si los resultados obtenidos responden a los resultados esperados, que se plantearon en la tabla 7.6 de este capítulo:

1. *Constatar que los conocimientos del profesor pueden cambiar en el transcurso de la realización de un PIM por los estudiantes.* Este resultado se ha obtenido con claridad en más de una ocasión. La variable más influyente para que esto ocurra es que el nivel de profundidad del análisis y la reflexión obtenido en las mediaciones heurísticas sea el adecuado.

2. *Detectar conflictos cognitivos, teniendo en cuenta las creencias epistémicas y/o didácticas del profesor, entre sus conocimientos y los que se generan o aparecen en los PIM.* Este resultado también se ha obtenido en más de una ocasión. Siempre que, a través de la mediación heurística, se detecta una insuficiencia en los conocimientos del profesor, ya se tiene el conflicto cognitivo. Esto ha sido ilustrado en el caso de los ejemplos genéricos y en los patrones de razonamiento.

3. *Proponer la consolidación, modificación o sustitución de alguna idea del marco de conocimientos (de contenido y didácticos de contenido) del profesor, de alguna de las formas siguientes:*

    a. *Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces porque explican adecuadamente las situaciones.*

    b. *Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.)*

    c. *Modificación y/o sustitución de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos*

    d. *Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos*

    e. *Consolidación o modificación de las creencias del profesor.*

Se tiene, por tanto, una catalogación de las modificaciones que se espera encontrar. En la tabla 7.7. aparecen las modificaciones que se han producido y los tipos de cada una de ellas.

Como se ha podido comprobar en el análisis, los conocimientos del profesor se transforman al analizar los informes de los estudiantes. En orden de frecuencia, se podrían ordenar de la siguiente forma:

- La mayoría de las veces los conocimientos del profesor se consolidan y refuerzan. En este sentido se debe aclarar que aquí están incluidos los conocimientos erróneos del profesor, sean pocos o muchos;
- Otras veces tienen un proceso de reacomodación de conocimientos, en el que los conocimientos anteriores se resitúan en los esquemas junto a otros nuevos;
- En varias ocasiones se producen modificaciones en sus creencias, por consolidación o por eliminación de creencias erróneas o parcialmente erróneas.
- En algunas ocasiones hay una sustitución de conocimientos erróneos por otros nuevos y correctos.

En todas estas transformaciones juegan un papel importante las creencias del profesor, sobre todo en algunas situaciones en las que ignora cuál es el conocimiento verdadero y el profesor decide en base a sus creencias (sean verdaderas o erróneas).

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

8.1. PRESENTACIÓN

En este capítulo, teniendo en cuenta el objetivo y los límites que planteamos al inicio de nuestro trabajo y basándonos en los datos del estudio realizado, presentaremos las conclusiones finales organizadas de la siguiente forma:

- En primer lugar nos centraremos en los objetivos planteados en la investigación, valorando las respuestas obtenidas a los interrogantes planteados en las preguntas del problema de investigación: a) proceso de generación de un PIM, a partir de una tarea de resolución de problemas; b) papel de los ejemplos, contraejemplos y analogía en el trabajo con conjeturas y la búsqueda de la prueba; c) los cambios en los conocimientos del profesor en el desarrollo y análisis de un PIM. Para cada uno de ellos se analizarán las fortalezas y debilidades de las respuestas encontradas.

- En segundo lugar trataremos algunos aspectos del método utilizado en la investigación. Se valorará la metodología y su concreción en los *Casos* planteados y en las mediaciones priorizadas en cada uno de ellos.

- En tercer lugar señalaremos algunas conclusiones didácticas y las implicaciones futuras que se derivan de ellas y de la investigación realizada (para la enseñanza de las matemáticas y para futuras investigaciones).

- Por último, se hará una reflexión personal sobre el trabajo de investigación llevado a cabo.

8.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Como decíamos en el capítulo 1 (punto 1.5.) al presentar los objetivos de la investigación, *la finalidad principal y última de esta investigación es dar pasos en la elaboración futura de un modelo para la caracterización de los proyectos de investigación matemática con estudiantes de Bachillerato, del que actualmente se carece.* Este objetivo principal se plasmaba en los siguientes objetivos concretos, con sus correspondientes preguntas y cuestiones de investigación:

OBJ1. Clarificar el concepto y la estructura de un PIM, distinguiéndolo de otras tareas que conllevan la realización de una investigación matemática en el contexto escolar.

1. Los PIM, en el contexto de la Educación Secundaria, son tareas matemáticas que tienen entidad e identidad propia, aunque algunas de sus características son comunes a otras tareas matemáticas escolares.

1.2 ¿Se pueden definir los PIM de forma eficaz, diferenciándolos de otras tareas matemáticas?
1.3 ¿Se puede caracterizar su estructura (fases y tareas principales)?

OBJ2. Establecer conexiones entre las tareas de resolución de problemas y los PIM, a través de la caracterización del proceso de obtención de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas.

2.1. ¿Se puede caracterizar el proceso de obtención del problema de investigación de un PIM, por extensión de una tarea de resolución de problemas? ¿Qué invariantes operacionales, de los esquemas menales de los estudiantes, se identifican como característicos de ese proceso?

OBJ3. Profundizar en el estudio del papel que juegan algunos procesos matemáticos, que pone en práctica el estudiante en el desarrollo de un PIM, para la resolución del problema de investigación.

3. *En el desarrollo de determinados PIM, los procesos cognitivos más habituales que el estudiante pone en práctica son los de particularizar, generalizar, conjeturar, justificar y el uso de la analogía.*

3.1. *¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la solución del problema de investigación (que puede ser una prueba, demostración, la existencia o verificación de un resultado, etc.)?*

3.2. *¿La analogía funciona como un catalizador en los procesos de abstracción y búsqueda de generalizaciones? ¿Qué papel juega la analogía en estos procesos?*

OBJ4. Ejemplificar la utilidad de los PIM para producir cambios en los conocimientos del profesor

4. *El profesor se sitúa, en el desarrollo del PIM y en la revisión del informe científico del estudiante, con sus conocimientos de contenido y didácticos de contenido. En algunos casos, además, el propio profesor elabora un informe sobre el PIM desarrollado por los estudiantes, analizando el desarrollo del mismo.*

4.1. *¿Pueden modificarse los conocimientos del profesor en el análisis de un PIM? ¿Qué tipo de modificaciones se pueden producir?*

A continuación, teniendo en cuenta los resultados presentados en cada uno de los capítulos anteriores, presentaremos las principales conclusiones de la investigación, relacionándolas con los objetivos y las cuestiones de investigación de cada uno de ellos. Se presentarán en negrilla para diferenciarlas del resto del texto.

8.2.1. Los Proyectos de Investigación matemática. Significado y estructura

La primera cuestión de investigación se centraba en el concepto y estructura de un Proyecto de Investigación Matemática (PIM). Todo ello se concretaba en las preguntas 1.1 y 1.2 de la investigación.

En el punto 2.1.8, del Capítulo 2, dedicado al estudio de distintos tipos de tareas matemáticas escolares, se han identificado las características principales de un PIM (estructura, informe científico final y ejemplos de problemas de investigación planteados en varios ejemplos de PIM). En el Capítulo 4, punto 4.2.1. se presentó la propuesta de definición de PIM, sus fases y los principales procesos cognitivos que el estudiante pone en práctica en su desarrollo.

Se ha constatado que un PIM se caracteriza por ser una tarea de investigación abierta (en el sentido de que la meta está fijada por el estudiante). Su desarrollo se estructura en cuatro fases, caracterizadas por unas actividades a desarrollar y por unos procesos cognitivos que el estudiante debe poner en práctica.

La Fig. 4.1. del Capítulo 4 representa, de forma gráfica, las fases y procesos cognitivos de un PIM.

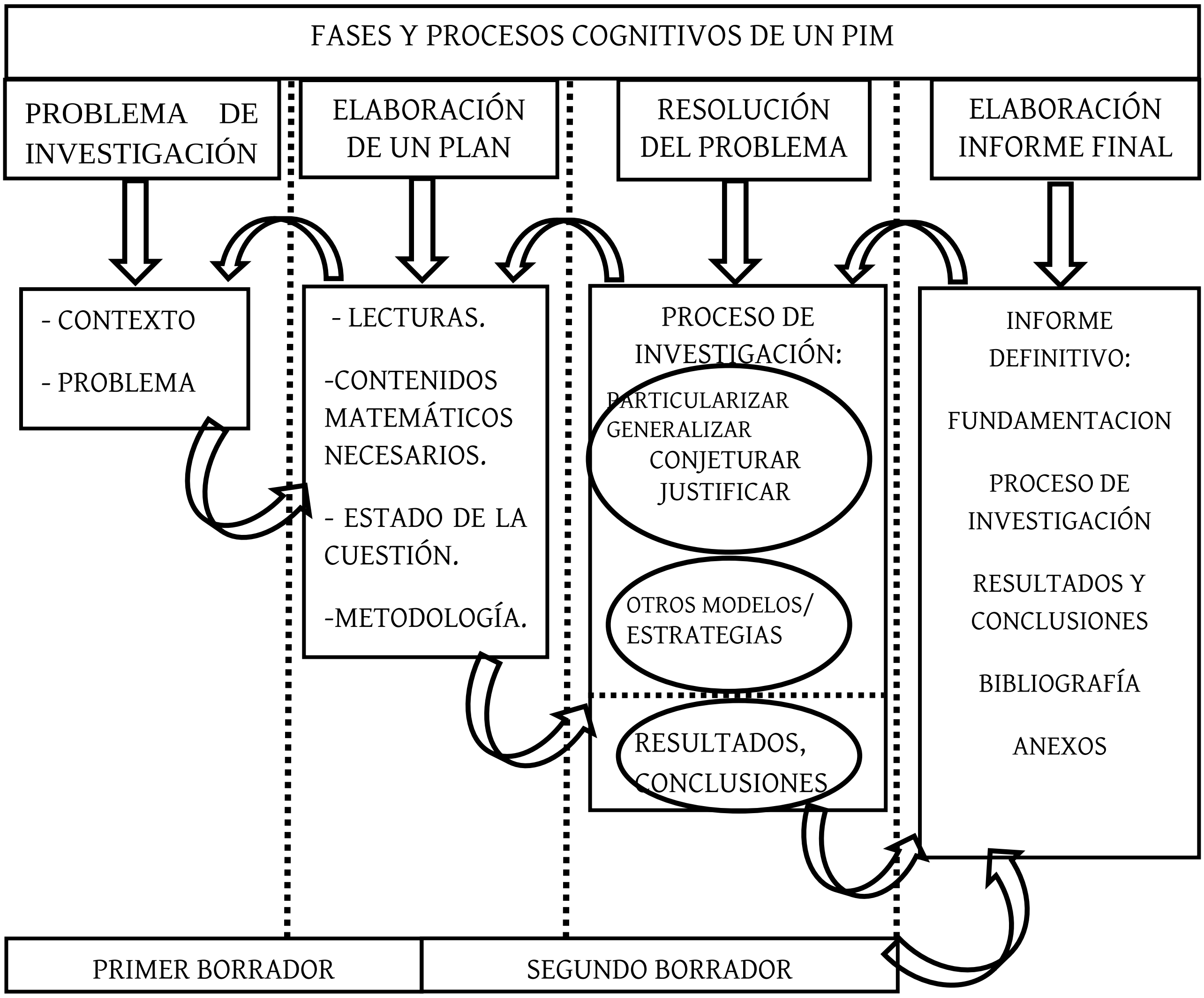


Fig. 4.1. Fases de un PIM y procesos cognitivos que se ponen en práctica

Del análisis del proceso anterior destacaremos otras conclusiones:

En la tercera fase del desarrollo de un PIM, el estudiante lleva a cabo un proceso de investigación en el que ponen en práctica diferentes procesos cognitivos, entre otros: particularizar, generalizar, conjeturar, justificar, contextualizar, otras estrategias heurísticas u otros modelos de resolución de problemas, modelizar y matematizar. Los procesos utilizados están asociados a la naturaleza del problema de investigación planteado.

El desarrollo de un PIM, tal como aparece en la Fíg. 4.1., engloba un proceso de resolución de problemas en el que se han hecho explícitos algunos de los procesos cognitivos que suelen ser útiles en el contexto escolar en el que se ha llevado a cabo esta investigación. Algunos de esos procesos, concretamente *particularizar, generalizar, conjeturar, justificar,* constituyen parte esencial del modelo de resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey (1982), aunque pueden ser necesarios otros, en función de la naturaleza del problema de investigación del PIM.

La cuarta fase del desarrollo de un PIM conlleva la elaboración definitiva de un informe científico, por parte del estudiante, con una estructura bien definida. Este informe contribuye de una manera decisiva al desarrollo de las competencias matemáticas y a la consecución de aprendizajes por el estudiante.

El informe científico es lo que en una investigación científica se denomina la *memoria* del proyecto. Los borradores del informe son los principales instrumentos del profesor para orientar al estudiante en el proceso, y la versión definitiva del mismo sirve para evaluar los aprendizajes del estudiante (conceptuales, procedimentales y actitudinales) conseguidos con el PIM. Es muy importante para el estudiante por su carácter formativo y por las exigencias de reflexión rigurosa y exhaustividad que conlleva, porque no se limita a presentar los resultados o soluciones de problema de investigación, sino exige que el estudiante haga explícitas las razones por las que ha tomado esas decisiones, que justifique los caminos que ha recorrido; en definitiva, que fundamente el trabajo realizado.

En cuanto a la pregunta 1.3. de la primera cuestión de la investigación, que trata sobre la caracterización del proceso de obtención del problema de investigación de un PIM, por extensión de una tarea de resolución de problemas, junto con los procesos cognitivos que se dan en ese proceso, la respuesta ha sido desarrollada en el capítulo 5, apoyándonos en las mediaciones de tipo pragmático que han servido para identificar los invariante operacionales de los esquemas de los estudiantes. Esta identificación se llevó a cabo mediante el análisis de varios ejemplos de PIM de diferentes contenidos.

El análisis anteriormente citado nos ha permitido proponer un primer acercamiento a un modelo estructurado en tres fases, que describe globalmente el proceso de extensión de una tarea de resolución de problemas en un PIM, mediante la Fig. 5.18, que presentamos más abajo.

Se han dado los primeros pasos para la caracterización del proceso de generación de un PIM a partir de una tarea de resolución de problemas, mediante un modelo estructurado en tres fases, en el que se han identificado los procesos cognitivos más utilizados por los estudiantes en el proceso. El proceso se da por finalizado cuando el estudiante ha identificado y enunciado el posible problema de investigación del PIM.

En este proceso se ha visto que juegan un papel importante: a) algunos procesos cognitivos que permiten al estudiante profundizar en la estructura del problema inicial y; b) algunas estrategias útiles para generar nuevas preguntas, variantes del problema inicial.

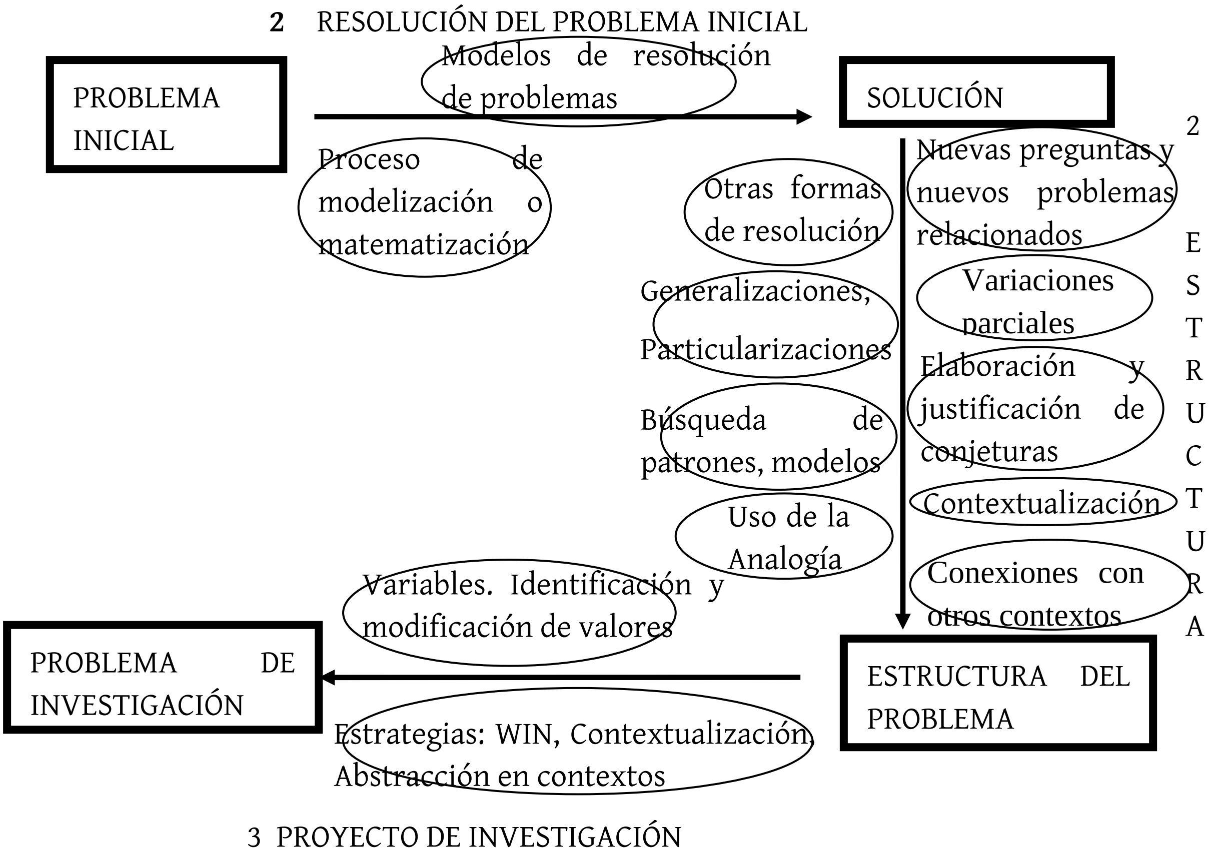


Figura 5.18. Proceso de generación de un PIM a partir de una tarea de R.P.

Así mismo, se identificaron los invariantes operacionales de los esquemas de los estudiantes, los más abundantes en el proceso (tabla 5.17):

INVARIANTES OPERACIONALES
Particularización. Ejemplos genéricos. Casos especiales
Patrones e invariantes. Similitudes, diferencias
Generalización. Abstracción en contexto
Conjeturas: construcción y justificación
Demostración matemática
Procesos de Matematización - Modelización
Variaciones en el problema. Estrategias ¿qué si no?, ¿y si?...
Contextualización
Conexiones entre contextos
Otras estrategias heurísticas para R.P.: recuento de casos, lenguaje apropiado (gráfico, algebraico, etc.), …

Después de la presentación de conclusiones sobre la primera cuestión de investigación, se pasa a valorar los resultados mediante un análisis de sus puntos fuertes y puntos débiles. Para ello y, con el fin de facilitar su *visión* y lectura, se presentan en tablas, agrupados por cuestiones y preguntas de investigación:

PRIMERA CUESTIÓN DE INVESTIGACIÓN (PREGUNTAS 1.1, 1.2 Y 1.3)		
PREGUNTA / RESULTADOS	PUNTOS FUERTES	PUNTOS DÉBILES
Definición de PIM	- La metodología usada, el análisis comparativo de las tareas matemáticas, ha sido muy eficaz para distinguir y caracterizar. - La definición de PIM se apoya en algunos conceptos conocidos, combinándolos en una tarea de unas características y una identidad propias. - Se han explicado y comentado todos los términos complejos de la definición.	
Estructura y fases de un PIM	- Se ha caracterizado la estructura y las fases, evidenciando aspectos comunes con otros procesos consolidados, en los que hay actividad investigadora. - Se ha integrado el informe científico final en el proceso, y se ha concretado la estructura del mismo. - Se ha elaborado un modelo gráfico de representación que permite una mejor comprensión de la estructura y fases.	- Se ha realizado una descripción global de las fases, sin entrar en las tareas concretas que desarrolla el estudiante en cada una de ellas.
Proceso de generación de un PIM, a partir de una tarea de R. P.	- Los casos analizados han sido muy variados, lo que ha facilitado que los resultados sean bastante completos. - El análisis mediante las mediaciones pragmáticas de la Génesis documental se ha revelado como un instrumento metodológico muy eficaz y versátil. - Se han identificado los procesos cognitivos más característicos, implicados en el proceso de generación del PIM. - El proceso conecta la R. P. con los PIM, por lo que acerca el proceso de descubrimiento a los estudiantes de Secundaria. - Se ha elaborado un modelo gráfico de representación que permite una mejor comprensión de la estructura del proceso y de sus fases.	-El proceso es complejo y el modelo presentado es un primer acercamiento, que puede ser mejorado investigando en cada una de las fases por separado.

Tabla 8.2. Primera cuestión de investigación. Puntos fuertes y débiles

8.2.2. Algunos procesos cognitivos en un PIM. Ejemplos, contraejemplos, analogía y razonamientos

La segunda cuestión de investigación tenía dos preguntas bien diferenciadas. La primera de ellas hace referencia a los ejemplos y contraejemplos en la construcción de conjeturas que nos acercan a la solución del problema de investigación del PIM y en la construcción de razonamientos que nos permiten justificar o refutar esas conjeturas (que puede ser una prueba, demostración o verificación de un resultado). La segunda de las preguntas presenta se refiere al papel de la analogía en la búsqueda de patrones que permitan la abstracción de contextos y generalización de ideas.

En el capítulo 6 se ha planteado el análisis, desde el punto de vista de las actividades de los estudiantes, del papel y los usos de algunos procesos matemáticos útiles para la resolución del problema de investigación de un PIM (concretamente, los ejemplo y contraejemplos en la construcción de una demostración y la analogía en la conexión entre contextos); concretamente el punto 6.2 analiza los ejemplos y contraejemplos y el 6.3 la analogía. El punto de vista adoptado en este capítulo es el del estudiante; es decir, el análisis va del profesor hacia los estudiantes (Figura 4.8. Mediaciones en la Experimentación 2. Caso 1 de las actividades mediadas), las mediaciones priorizadas son de tipo epistémico y los resultados obtenidos se refieren al trabajo de los estudiantes.

Ello no es óbice para que los resultados obtenidos por los estudiantes, contenidos en los informes, provoquen en el profesor conflictos cognitivos mediante los cuales se replantee algunos aspectos de su marco de conocimientos, siendo estos aspectos el contenido central del capítulo 7.

Aunque, en un primer análisis de la investigación, el trabajo con ejemplos y contraejemplos podría parecer poco novedoso, en el transcurso de la misma se ha podido comprobar que, en el contexto escolar de Bachillerato (que es donde se ha llevado a cabo), los ejemplos y contraejemplos en el trabajo con conjeturas, para generalizar o aproximarse a las soluciones buscadas, forman parte de los procesos cognitivos más accesibles y eficaces para los estudiantes de estos nivel educativo, ya que proporcionan un acercamiento a los procesos de investigación matemática, de creación y descubrimiento, partiendo de lo concreto y facilitando los procesos de generalización.

Para entender la conclusión anterior, nos debemos situar en el contexto de estudiantes de Bachillerato que, en la mayoría de los casos, se enfrentan a este tipo de procesos por primera vez, ya que habitualmente, en las clases de matemáticas, no se plantean procesos en los que sea necesario construir conjeturas y justificarlas o refutarlas. Las tareas habituales suelen ser cerradas sin posibilidad para que el estudiante se plantee sus propias metas y pueda elegir entre distintos caminos posibles.

En la búsqueda de respuestas a la primera de las preguntas, desarrollada en el punto 6.2. del Capítulo 6, nos hemos apoyado en las mediaciones epistémicas que se dan en una actividad mediada por un instrumento. En los resultados obtenidos se ha profundizado en el concepto de *ejemplo genérico*, y en su papel en la construcción y justificación de conjeturas. Como resultado de todo ello se ha propuesto una tipología para clasificar los ejemplos o casos particulares, en función de si son concretos o generales y genéricos o no genéricos (Capítulo 6, Fig. 6.5):

$$Ejemplos\ o\ Casos\ particulares \begin{cases} Concretos \begin{cases} No\ genéricos\ (ECNG) \\ Genéricos\ (ECG) \end{cases} \\ Generales \begin{cases} No\ genéricos\ (EGNG) \\ Genéricos\ (EGG) \end{cases} \end{cases}$$

Los ejemplos o casos particulares pueden ser concretos o generales en función del criterio que se tome para clasificarlos. Un mismo ejemplo puede ser concreto para un criterio y general para otro.

La idea de ejemplo genérico es como la idea de problema: es subjetiva y depende de la persona que los trabaje. Un mismo ejemplo, para una persona puede ser genérico (si identifica su estructura subyacente) y para otra puede ser no genérico (porque no identifica esa estructura subyacente).

Por otra parte, el análisis de los patrones de razonamiento utilizados en el trabajo con las conjeturas para la construcción de una demostración, o en la resolución de un problema, se ha identificado una variante para uno de los patrones de razonamiento de Polya, que también se presenta modelizado en el Capítulo 6 (punto 6.2.4.). Su enunciado es el siguiente:

Sean C, C_1, C_2, ..., C_n conjeturas, de tal forma que se cumple que $C \Rightarrow C_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos que C_1 es falsa y que C_2, C_3, ..., C_n son verdaderas. Construimos otra conjetura D, modificando las condiciones de C, acercándolas a las condiciones de alguna de las C_i , para $i = 2, \ldots, n$; de forma que $D \Rightarrow C_i$, $\forall i = 2, 3, \ldots, n$. Con estas condiciones, se cumple que C es falsa y D es un poco (o mucho) más digna de crédito, en función de las semejanzas (o diferencias) que existan entre C_2, C_3, ..., C_n. Este patrón, por analogía con el de Polya (1966, pág. 285) añade una cualificación al patrón fundamental inductivo.
Este razonamiento abductivo (Peirce, 1960) lo podemos modelar de manera análoga a como hace Polya (1954, 1966(traducción española)) en sus patrones de razonamiento plausible:

$$C \Rightarrow C_i , \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
$$C_1 \text{ es falsa}$$
$$C_i , \forall i = 2, 3, \ldots, n \text{ son verdaderas y semejantes (ó diferentes) entre sí}$$
$$D \Rightarrow C_i , \forall i = 2, 3, \ldots, n$$

C es falsa y D es más (ó mucho más) digna de crédito

En el trabajo de construcción y justificación de conjeturas se elaboran con frecuencia cadenas complejas de razonamientos plausibles, que pueden contener matices nuevos que enriquecen los patrones ya conocidos. El análisis minucioso de estos procesos puede facilitar hacerlos explícitos y su modelización, como se hace habitualmente con los patrones conocidos.

El ejemplo presentado nos muestra la complejidad y riqueza de este tipo de procesos y pone en valor, más aún, el trabajo con ejemplos y contraejemplos en la construcción y justificación de conjeturas y en la construcción de pruebas y demostraciones.

En cuanto a la pregunta 2.2. sobre el uso de la analogía, en el Capítulo 6 (punto 6.3.5.) se analizaron varios episodios y pasajes de actividades mediadas por un instrumento de tipo documental. En este caso nos apoyamos en las mediaciones de tipo epistémico para llegar a los resultados presentados en el punto citado anteriormente.

En el desarrollo de un PIM se han descrito dos usos de la analogía: el proceder por analogía y el establecimiento de analogías-proceder por analogía. En cada uno de estos usos, se procede secuencialmente por medio de dos pasos y en un contexto determinado.

La diferencia entre los dos usos radica en que en el primero se parte de una entidad matemática en un contexto determinado (una idea conceptual o procedimental, un resultado, un modelo, una estructura,...), se analizan sus cualidades y se *procede por analogía*, construyendo, (diseñando o elaborando), en otro contexto (más general o más concreto, generalizando o particularizando) otra entidad análoga, que mantiene las características de la primera, adaptadas al nuevo contexto. Por el contrario, en el segundo uso se parte de dos entidades o ideas matemáticas (conceptos, fórmulas, estrategias u otros procedimientos, demostraciones, resultados, modelos, estructuras,...), se comparan entre sí, eligiendo unos criterios, para detectar y establecer todas las posibles similitudes y características comunes entre ellas, mediante un análisis comparativo. Cuando se descubre la estructura común subyacente a ambas, independiente de sus contextos, es cuando se *establece la analogía* y se dice que, para esos criterios, las dos entidades son análogas. Posteriormente se puede dar un paso más: a la luz de las similitudes encontradas se *procede por analogía* para construir otra entidad del mismo tipo, situada en un contexto más general o más concreto, generalizando o particularizando, según el caso, las entidades que se tenían inicialmente.

El uso de la analogía denominado proceder por analogía, no siempre asegura que la entidad resultante sea análoga a la inicial.

Por ejemplo, si definimos la suma en el conjunto Q análogamente a como se define el producto; es decir, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, el resultado no es coherente (genera contradicciones, por ejemplo el nº 0/1 no sería el elemento neutro, luego esa suma no es la análoga a la suma en Z). Por tanto, esa definición es análoga al producto, pero no es la suma tradicional, la que engloba a la suma en en conjunto de los números Enteros y no tiene ningún interés. Lo mismo pasa con el producto en el conjunto de números complejos C, si lo definimos análogamente a la suma en C; es decir, (a, b).(c, d)=(a.c, b.d).

El uso de la analogía denominado establecimiento de analogías-proceder por analogía no siempre va en la dirección de la generalización, hacía lo más abstracto. Eso depende del contexto en el que se construye la nueva entidad, análoga a la(s) inicial(es).

Un ejemplo de ello es cuando, a partir de la fórmula del término general, o de la suma de los elementos de una RA2D, se particulariza y se obtienen las expresiones análogas para la suma o el término general de las p.a. tradicionales.

Hay una cuestión importante, que es común a los dos usos de la analogía, que está relacionada con una parte de la pregunta de investigación, que debe ser contestada explícitamente ahora: ¿la analogía es un catalizador?

La analogía será un catalizador cuando facilite que el proceder por analogía (la construcción de la entidad análoga en el nuevo contexto) concluya con éxito y sea eficaz. Esto estará asegurado cuando el proceso de identificación (el primer paso de cada uno de los usos) sea completo y detecte las características esenciales de la/s entidad/es analizada/s.

En este caso es cuando la analogía facilita el paso de un contexto a otro, utilizando como guías las características detectadas en el *establecimiento de analogías*.

Además de lo anterior, la reflexión posterior nos ha permitido conseguir otros resultados que se van a presentar a continuación. Se parte de la idea de que la analogía entre dos ideas matemáticas es el nexo que permite pasar del contexto de una de ellas al contexto de la otra sin variar la esencia de ninguna; es decir, que las ideas, en sus contextos respectivos expresan la misma esencia.

Se ha precisado más la idea de analogía, mediante la construcción de definiciones que delimiten bien la esencia y el significado de la misma.

Estas definiciones se presentan a continuación:

1. Definición de analogía entre dos ideas matemáticas:

   Dada la idea A en el contexto C_A y la idea B en el contexto C_B, decimos que la idea A es análoga a la idea B cuando, si se prescinde de los contextos respectivos, las dos ideas expresan lo mismo, son la misma cosa. Entonces se dice A es la análoga a B en el contexto C_A o que B es la análoga a A en el contexto C_B.

2. Significado de *proceder por analogía* o *procedimiento por analogía*:

   Sea una idea A, en un contexto C_A, con unas características, y sea otra idea B en un contexto C_B diferente al de A. Se dice que, a partir de A, se ha procedido por analogía para obtener B si se ha construido un procedimiento P_B, para obtener B, de forma que P_B recoge las características de A, las adapta al contexto C_B y las traslada a B; es decir, que B tiene las características de A adaptadas a su contexto. Por tanto, B es análoga a A por construcción.

3. Relación entre la analogía y la generalización:

   Dadas dos ideas A y B análogas, con sus respectivos contextos C_A y C_B. Si C_A es más general o más abstracto que C_B, en el sentido que C_B es un caso particular de C_A, o que C_B es una restricción de C_A, entonces A expresa una idea más general que B, A generaliza a B. En este caso la analogía ha servido para generalizar.

Por ejemplo, si A=2 en el conjunto de los números Naturales y B=2/1 en el conjunto de los números Racionales, podemos decir que A y B no son iguales, pero expresan la misma idea; es decir que A y B son análogos, cada uno en su contexto. Como el contexto de B, el conjunto de los números Racionales, es más general que el contexto de A, el conjunto de los números Naturales, decimos que B generaliza a A.

Se ha mejorado la presentación de los usos de la analogía, mediante la construcción de un modelo gráfico (Fig. 8.2.) concretamente un diagrama que contempla todas las posibilidades y pasos de cada uso. Esta forma de representación puede ser útil para facilitar el acercamiento de los estudiantes y profesores al trabajo con la analogía.

Este diagrama no se presentó en el capítulo 6, porque se ha elaborado posteriormente, fruto de la reflexión posterior y de la concreción de las definiciones. La Fig. 8.2 representa el modelo gráfico de los usos de la analogía. En ella podemos observar que:

a) Está adaptado para los dos usos, en los que intervienen, respectivamente, una o dos ideas matemáticas, y los itinerarios de los dos están diferenciados en los pasos en que las tareas a realizar lo exigen;

b) Refleja que, en la búsqueda de similitudes entre las ideas matemáticas A y B, el proceso puede ser repetido las veces que hagan falta, hasta conseguir la identificación completa, sin pasar al siguiente paso;

c) Permite finalizar el uso 1 una vez establecida la analogía entre A y B, o sin haberlo hecho;

d) Permite la repetición de cada uso, de manera completa, si los resultados no son los adecuados o esperados.

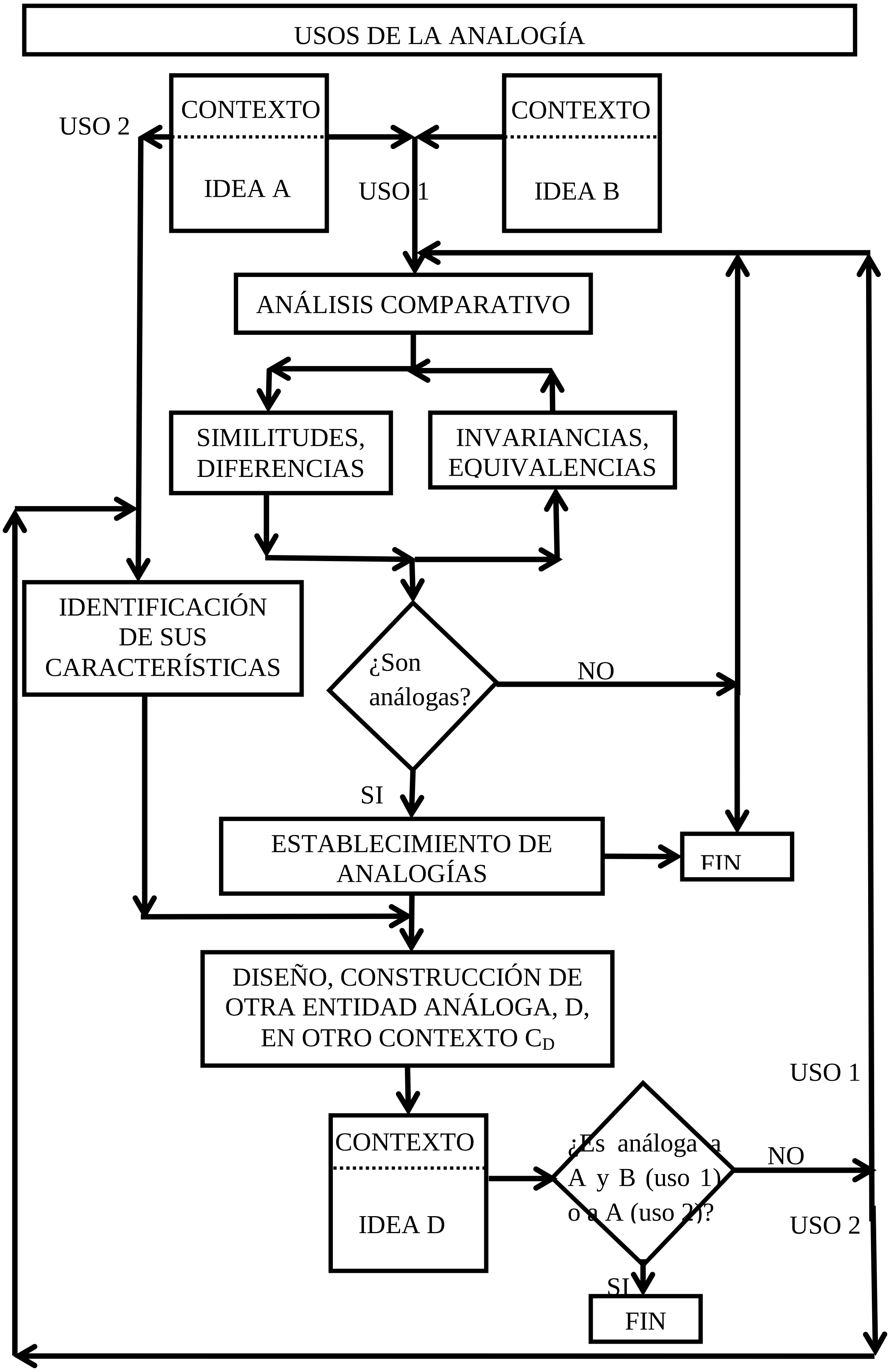


Figura 8.2. Usos de la analogía

En lo que se refiere a las fortalezas y debilidades de los resultados encontrados como respuestas a las dos preguntas de la segunda cuestión de la investigación, se presentan en la tabla 8.3:

SEGUNDA CUESTIÓN DE INVESTIGACIÓN (PREGUNTAS 2.1. Y 2.2)		
PREGUNTA / RESULTADOS	PUNTOS FUERTES	PUNTOS DÉBILES
Ejemplos y contraejemplos en la búsqueda de la prueba	- Se ha sistematizado el papel de la particularización en el trabajo con conjeturas para la búsqueda de la prueba. - Se ha propuesto una clasificación de los ejemplos, con los criterios: generalidad y carácter genérico. - Se han elaborado modelos de representación para visualizar la jerarquía de las conjeturas entre sí. - El análisis mediante las mediaciones epistémicas de la Génesis documental se ha revelado muy eficaz.	- La clasificación de los ejemplos debe profundizarse, porque no ha quedado del todo cerrada. La aportación seguramente que podría ser ampliada si se investigara más el tema (sobre el carácter concreto-general de los ejemplos, sobre su carácter genérico o no genérico).
Razonamientos en el trabajo con conjeturas	- Se han conectado los procesos cognitivos de particularización y generalización con los patrones de razonamiento plausible en situaciones de R. P. o de búsqueda de una demostración. - Se ha identificado una variante de un patrón de razonamiento de Polya, que da mayor versatilidad al patrón fundamental inductivo. - El modelado del patrón de razonamiento identificado lo hace más comprensible y fácil de comprender. - El análisis mediante las mediaciones epistémicas de la Génesis Documental se ha revelado muy eficaz.	- La novedad de la variante del patrón de razonamiento debe ser validada por la comunidad científica, antes de darlo por definitivo
La analogía como catalizador en las generalizaciones	- El trabajo en grupo, dada la variedad de contenidos trabajados por los estudiantes, ha multiplicado las posibilidades del análisis en la mediaciones epistémicas - La respuesta a la pregunta de investigación relativiza el papel de la analogía como catalizadora en los procesos de generalización. - Las definiciones de *ideas análogas* y del significado de *proceder por analogía* refuerzan el rigor de los resultados encontrados y del trabajo realizado. - El análisis mediante las mediaciones epistémicas de la Génesis Documental se ha revelado muy eficaz.	- Los resultados obtenidos sobre la analogía han permitido descubrir la riqueza, complejidad y utilidad de este proceso de pensamiento. Los resultados responden a la pregunta de investigación, pero la analogía admite otros enfoques e investigaciones,
Papel y usos de la analogía	- La sistematización de los dos usos de la analogía identificados, mediante su concreción en pasos, dan un valor añadido a los resultados. - La sencillez del diagrama elaborado con los usos de la analogía, facilita su comprensión y su traslado al aula. - El análisis mediante las mediaciones epistémicas de la Génesis Documental se ha revelado muy eficaz.	- ¿Hay más usos de la analogía que no se han detectado por centrar el análisis en un solo trabajo?

Tabla 8.3. Segunda cuestión de investigación. Puntos fuertes y débiles

Se ha reforzado la idea de que el proceso cognitivo que habitualmente se denomina analogía tiene una potencia y una complejidad que la hacen digna de ser tratada de forma monográfica en futuras investigaciones. La potencia ha quedado manifestada en la capacidad que tiene la analogía para conectar contextos de diferente naturaleza o de

diferente nivel de generalidad. La complejidad ha quedado patente en los usos encontrados y en la riqueza de matices que se manifiestan al profundizar en su análisis.

8.2.3. Los conocimientos del profesor y el desarrollo de un PIM

La tercera cuestión de investigación hace referencia a las posibles modificaciones de los conocimientos del profesor en el desarrollo de un PIM. Concretamente se planteaba la pregunta 3.1. con dos interrogantes: *¿pueden modificarse los conocimientos del profesor en el análisis de un PIM? ¿Qué tipo de modificaciones se pueden producir?*

Para dar respuesta a estas cuestiones nos apoyamos en las mediaciones heurísticas de las actividades mediadas por un instrumento de tipo documental y en modelo de Shulman sobre el conocimiento especializado del profesor. Todo ello se ha concretado en los análisis llevados a cabo en el Capítulo 7 de la investigación. En este capítulo se plantea el análisis, desde el punto de vista del profesor, de los recursos (informe del profesor y de los estudiantes). Este análisis permite identificar, mediante la función productiva de la Génesis documental y las mediaciones heurísticas de la actividad mediada, las modificaciones que se producen en los dominios de los conocimientos especializados del profesor, (del contenido matemático y didácticos del contenido matemático). Por tanto, los análisis del capítulo 7 van del profesor y vuelven al profesor (Fig. 4.2. Actividad mediada. Caso 2, de la tesis), las mediaciones priorizadas son las heurísticas y los resultados se refieren al profesor. Esto se lleva a cabo en los puntos 7.2 y 7.3 del documento de la tesis.

Los conocimientos del contenido matemático y los conocimientos didácticos del contenido matemático del profesor se pueden modificar como consecuencia del trabajo de los estudiantes al desarrollar PIMs.

Los análisis llevados a cabo sobre los informes de los estudiantes o del profesor, han permitido:

4. ***Constatar que los conocimientos del profesor pueden cambiar en el transcurso de la realización de un PIM por los estudiantes***. Este resultado se ha obtenido con claridad en varias ocasiones en el transcurso del análisis. La variable más influyente para que esto ocurra es que el nivel de profundidad del análisis y reflexión en las mediaciones heurísticas sea el adecuado.

5. ***Detectar conflictos cognitivos, teniendo en cuenta las creencias del profesor, entre sus conocimientos y los que se generan o aparecen en los PIM***. Este resultado también se ha obtenido en más de una ocasión. Siempre que, a través de la mediación heurística, se detecta una insuficiencia en los conocimientos del profesor, aparece el conflicto cognitivo. Esto ha ocurrido en el caso de los ejemplos genéricos y en los patrones de razonamiento.

6. ***Proponer la consolidación, modificación o sustitución de alguna idea del marco de conocimientos (de contenido y didácticos de contenido) del profesor, de alguna de las formas siguientes:***

a. ***Refuerzo y consolidación de aquellos conocimientos del profesor que son eficaces porque explican adecuadamente las situaciones.***

b. ***Reacomodación de conocimientos del profesor que, aunque no son falsos, no son totalmente idóneos (métodos de resolución más eficaces, sencillos, más contextualizados a la situación, etc.)***

c. ***Modificación y/o sustitución de conocimientos, ya sean erróneos o parcialmente erróneos.***

d. ***Aprendizaje de conocimientos nuevos, por adquisición de otros ya existentes o por creación o descubrimiento de nuevos conocimientos.***

e. ***Consolidación o modificación de las creencias matemáticas (epistémicas o didácticas) del profesor.***

En la tabla 7.7. figuran las modificaciones y los tipos de cada una de ellas que se han identificado en el análisis . Como se puede constatar, se han producido de todos los tipos, aunque por cantidad de veces, podríamos ordenarlos como sigue:

- ***La mayoría de las veces los conocimientos del profesor se consolidan y refuerzan***. En este sentido se debe aclarar que aquí están incluidos algunos conocimientos erróneos del profesor, sean pocos o muchos;
- ***Bastantes veces se produce un proceso de reacomodación de conocimientos***, en el que los conocimientos anteriores se resitúan en los esquemas junto a otros nuevos;
- ***En varias ocasiones se producen modificaciones en sus creencias*** epistémicas y didácticas, por consolidación o por eliminación de creencias erróneas o parcialmente erróneas.
- ***En algunas ocasiones hay una sustitución de conocimientos erróneos*** por otros nuevos y correctos.

Se refuerza el papel de las creencias matemáticas (epistémicas y didácticas) del profesor en los cambios que se producen en sus conocimientos (de contenido y didácticos de contenido)

En todas estas transformaciones, de los conocimientos del profesor, juegan un papel importante las creencias matemáticas (epistémicas y diácticas) del profesor, sobre todo en algunas situaciones en las que ignora cuál es el conocimiento (de contenido o didáctico de contenido) verdadero y el profesor decide en base a sus creencias matemáticas (sean verdaderas o erróneas).

Por último, para la tercera cuestión de investigación y la pregunta planteada al efecto, la tabla 8.4 recoge los puntos fuertes y débiles de los resultados encontrados.

TERCERA CUESTIÓN DE INVESTIGACIÓN (PREGUNTA 3.1.)		
PREGUNTA / RESULTADOS	PUNTOS FUERTES	PUNTOS DÉBILES
Los conocimientos del profesor se modifican con los PIM	- El informe del profesor es un instrumento muy elaborado, con una variedad de matices muy interesante. - Las mediaciones heurísticas de la Génesis Documental, junto con el informe del profesor, se han revelado como un recurso muy potente, que ha proporcionado resultados muy interesantes. - El informe del profesor permite la identificación de cambios en sus conocimientos, más ligados a los contenidos matemáticos.	- Los resultados obtenidos del informe de los estudiantes no tienen la misma riqueza que los obtenidos con el informe del profesor, aunque son de diferente naturaleza
Tipos de modificaciones de los conocimientos del profesor	- El nivel de exhaustividad conseguido en la recopilación de los tipos de modificaciones que se pueden dar es muy grande. -El informe de los estudiantes ha permitido identificar tipos de cambios, en los conocimientos del profesor, muy ligados a temas de currículo y del aprendizaje de los estudiantes. - Las modificaciones en las creencias del profesor han tenido una entidad mucho mayor que la que le conceden los modelos teóricos.	- Los modelos teóricos sobre los conocimientos del profesor no están del todo desarrollados y, por tanto, consolidados. Por ejemplo, hay subdominios de conocimientos que se solapan.

Tabla 8.4. Tercera cuestión de investigación. Puntos fuertes y débiles

8.3. EL MÉTODO UTILIZADO

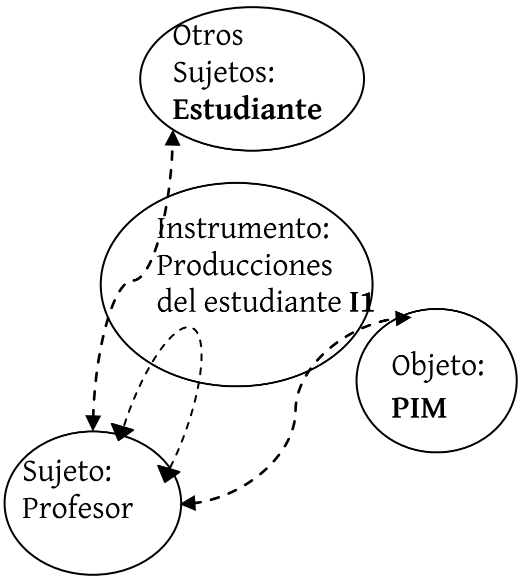


Figura 4.1. Actividades mediadas. Caso 1

Para la puesta en práctica de la metodología adoptada, se llevó a cabo un proceso de contextualización del marco teórico a la investigación. En este proceso se han obtenido una serie de resultados que han dado coherencia a los análisis efectuados, a la vez que han facilitado la obtención de los mismos. Entre ellos destacaremos los siguientes:

8.3.1. Los Casos 1 y 2 de las actividades mediadas

En la Génesis Documental, las actividades mediadas por un instrumento (en este caso de tipo documental) permiten priorizar el tipo o tipos de mediaciones que desean analizar y estudiar en profundidad, ya sean epistémicas, pragmáticas o heurísticas.

En el Caso 1 (Fig. 4.1.) focalizamos la atención en dos direcciones: la primera de ellas es la que engloba *sujeto-instrumento-objeto*, priorizando las mediaciones *pragmáticas*, para

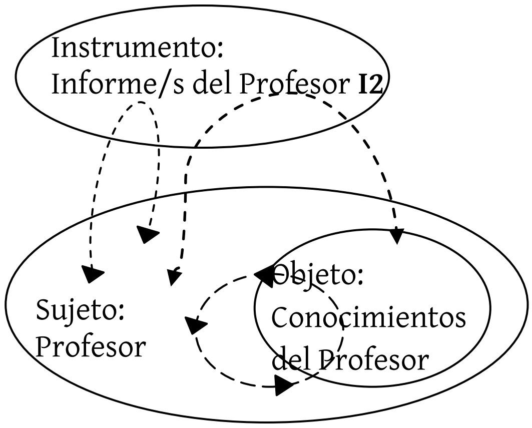


Figura 4.2. Actividad mediada. Caso 2

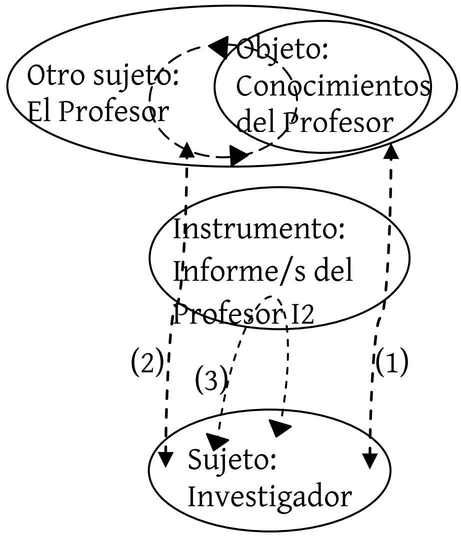


Figura 4.5. Variante del Caso 2

valorar la eficacia del instrumento en la consecución del objeto de la actividad. La segunda es la que comprende *sujeto-instrumento-otros sujetos* y focaliza la atención en las mediaciones de tipo *epistémico* para identificar los procesos mentales que desarrolla el estudiante y que están plasmados en la parte *artefacto* del *instrumento.*

En el Caso 2 (Fig. 4.2), el modelo para la actividad mediada tiene la singularidad de que el objeto es parte del sujeto. Por esta razón se focaliza la atención en la terna *sujeto-instrumento-sujeto* y se priorizan las mediaciones de tipo *heurístico* que son las más adecuadas en la toma de decisiones del sujeto.

El trabajo con estos modelos originó una variante para el caso 2 (Figura 4.5.). En ella se contemplan las ternas: a) *sujeto-instrumento-objeto*; b) *sujeto-instrumento-otro sujeto*. En esta variante el *sujeto* es un investigador y el *objeto*, como en el Caso 2, se encuentra en el *otro sujeto.* Este modelo puede ser utilizado cuando el investigador es una persona distinta del profesor, que en este caso pasa a ser el otro sujeto.

8.3.2. Conexiones entre las mediaciones heurísticas y la Génesis Documental

Se han identificado conexiones en el proceso de Génesis Documental, en el que se dan las dos funciones de instrumentación e instrumentalización, y el Caso 2 de la actividad mediada, a través de las mediaciones heurísticas.

La Fig. 4.6. es una representación de las mismas y se desarrollaron con más amplitud en el punto 4.3.3 del Capítulo 4. Estas relaciones fueron encontradas en el análisis efectuado en el Capítulo 7 en el que se priorizaron las mediaciones heurísticas para el Caso 2 de las actividades mediadas.

Las conexiones entre la Génesis Documental y las mediaciones heurísticas han permitido profundizar en la función de instrumentación entre sujeto y recurso-documento. Esta función permite que el recurso-documento interactúe con el sujeto y, a través de las mediaciones heurísticas (sujeto-instrumento-sujeto), se produzcan modificaciones en algunos de sus conocimientos. Este resultado, propiciado por el método utilizado, refuerza la utilidad del marco teórico de las actividades mediadas y la Génesis Instrumental o Documental y las conexiones encontradas entre ellas.

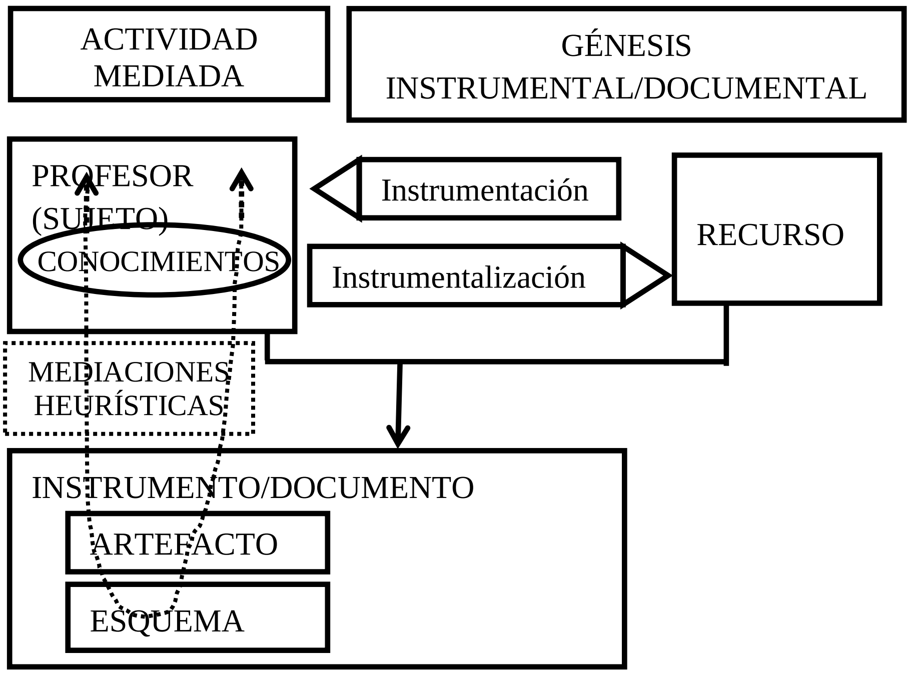


Fig. 4.6. Conexiones entre la Génesis Documental y las mediaciones heurísticas

8.3.3. Métodos complementarios para la validación de resultados

Para la validación de los resultados obtenidos en cada experimentación se han tenido en cuenta los criterios genéricos que deben cumplir las investigaciones de este tipo (Nieveen, 1999):

5. *Relevancia o Validez de contenido*. El diseño de la investigación y sus componentes se han basado en el conocimiento científico avanzado, fundamentado en el estudio del estado del arte y en las opciones elegidas para el marco teórico. La contextualización del marco teórico, desarrollada de forma minuciosa, ha permitido llevar a cabo análisis fundamentados

6. *Consistencia o Validez de la construcción.* En todo momento de la investigación se han ido relacionando todas las partes del diseño, impidiendo la aparición de contradicciones o desajustes entre algunas de las partes. Los instrumentos utilizados en las diferentes fases de la investigación han permitido conservar la objetividad de los análisis y la consistencia de los resultados en cada una de las preguntas de investigación.

Por tanto, la investigación se considera válida (Nieveen, 1999). Por otra parte, la investigación se puede considerar *práctica*, ya que cumple el criterio siguiente:

7. *Practicabilidad.* La intervención es trasladable al aula y los materiales son fáciles de usar, siempre que se adapten con un diseño y un desarrollo adecuados. Las ideas de tipo conceptual (definición, estructura y fases) y procedimental (generación, procesos cognitivos) sobre los PIM, se han representado en formas de fácil manejo para el profesor.

Por último, la investigación cumple el criterio de *eficacia o efectividad:*

8. *Eficacia o Efectividad*. La investigación consigue los resultados esperados y deseados en todos los trabajos abordados en las distintas experimentaciones y en los diferentes análisis abordados.

Además de lo anterior, se han utilizado algunos métodos complementarios para reforzar la validez de los resultados. (McKenney, Nieveen, y Van den Akker, 2006) proponen dos criterios fundamentales para el caso en que el investigador sea el propio profesor:

1. *Intervención de otros profesionales diferentes al investigador*. Para ello se ha planteado la investigación abierta a las miradas, el escrutinio y la crítica de profesionales, expertos investigadores, que no sean el propio investigador, mediante procesos de triangulación en varios de los temas desarrollados. En primer lugar los directores de la tesis han llevado a cabo una labor de análisis de todos los documentos, lo que ha generado un proceso de evaluación de todas las experimentaciones, así como de instrumentos utilizados y de los resultados obtenidos. En segundo lugar, la experimentación llevada a cabo sobre los ejemplos y contraejemplos, fue evaluada por expertos externos antes de su admisión para su presentación en el Congreso Internacional ETM 2014. En tercer lugar, los resultados sobre los patrones de razonamiento fueron evaluados por un experto investigador de la Universidad Complutense de Madrid. En todos los casos, las sugerencias y aportaciones de todos los investigadores externos se han tenido en cuenta para la mejora de diferentes aspectos de la investigación llevada a cabo. Todo ello ha redundado en la fiabilidad de la validez de los resultados.

2. *Asumir el papel de investigador crítico*. En todo momento, a lo largo de la investigación, se ha adoptado una actitud crítica con todo lo que se ha hecho. A medida que la investigación ha ido avanzando en las diferentes experimentaciones, con los consiguientes análisis, ha ido aumentando esta actitud en el investigador, de manera que los resultados han sido la parte más revisada y más cuestionada, antes de ser aceptados.

8.4. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS

En este punto expondremos las principales conclusiones y propuestas dirigidas al proceso de enseñanza y aprendizaje, incluyendo algunas para el profesorado. Debemos tener en cuenta que esta investigación, como todas las investigaciones en Educación Matemática tiene como objetivo final la mejora de algún aspecto del citado proceso; de ahí que sea conveniente elaborar algunas propuestas que puedan orientar el trabajo de los profesores.

Hay una conclusión que presentamos en primer lugar, que hace referencia a la investigación en su globalidad, y que se irá confirmando a medida que se van presentando las demás conclusiones referidas a cuestiones concretas de la investigación:

El aporte principal de este trabajo de investigación en Educación Matemática es mostrar que: (a) estudiantes de Bachillerato pueden embarcarse en trabajos serios de investigación matemática, aprendiendo tanto contenidos matemáticos conceptuales, procedimentales y actitudinales, como metacontenidos; es decir cómo utilizar los conocimientos que proporcionan los contenidos para hacer matemáticas de verdad, acercándose al proceso de descubrimiento y creación. En este sentido, la tesis podría considerarse una prueba fuerte de existencia de que tales procesos se pueden desarrollar antes de que los estudiantes lleguen a la Universidad; (b) En el trabajo de investigación, se hace una esfuerzo grande para describir las demandas, los desafíos y, sobre todo, las oportunidades que todo ello representa para el profesor en términos de conocimientos pedagógicos y matemáticos.

Como decíamos más arriba, esta conclusión es el fruto de la conjunción de todas las demás, que se presentan a continuación.

Las conclusiones y propuestas son consecuencias del trabajo y de los resultados de la investigación y se proyectan hacia el futuro, en un afán de mejorar los procesos educativos en relación con las matemáticas. Para su presentación, hemos decidido agruparlas entorno a cada una de las preguntas de investigación, para que queden claras las conexiones entre ambas:

8.4.1. Sobre el significado, caracterización y generación de un PIM

La primera cuestión de investigación hacía referencia al significado y caracterización de los PIM. Sobre ella se deben tener en cuenta las siguientes ideas:

Los PIM son un tipo de tareas matemáticas muy poco presentes en la práctica cotidiana de los profesores, aunque figuran en el currículo oficial de todas las etapas educativas, desde la Ed. Primaria hasta el Bachillerato. Se hace necesario que se diseñen y desarrollen planes de formación del profesorado en los que se plantee el tema.

Como hemos comprobado en la investigación, las tareas matemáticas que conllevan un proceso de investigación están muy poco presentes en el aula y son desconocidas, tanto para los profesores como para los estudiantes. Por otra parte, el análisis de los currículos de las matemáticas de ESO y Bachillerato confirma la presencia de las investigaciones matemáticas y de los proyectos de investigación en los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de todos los niveles educativos y en todas las etapas. De ahí la necesidad de planes de formación que incidan en ello y palíen las deficiencias del profesorado en este tema.

Los PIM son tareas muy ricas para el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, porque en ellas se trabajan aspectos de: resolver problemas, pensar matemáticamente, razonar con corrección lógica, representar ideas matemáticas

utilizando diferentes lenguajes, modelar situaciones de la realidad, usar códigos, símbolos y notaciones matemáticas y comunicar ideas matemáticas.

La mayoría de las competencias matemáticas se trabajan en algún momento del desarrollo de un PIM. Por eso este tipo de tareas pueden ser tan enriquecedoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los PIM convierten a los estudiantes en los protagonistas de sus aprendizajes: resuelven los problemas que ellos mismos se plantean, toman decisiones sobre los caminos, estrategias y enfoques de la investigación, reflexionan sobre el proceso y los resultados conseguidos, y comunican las ideas a través de un documento científico.

Una de las características de una tarea de investigación abierta es la ausencia de metas fijadas a priori. En un PIM, los estudiantes deben tomar decisiones sobre todos los aspectos que lo componen y que figuran en el párrafo anterior, por ello hacen que los estudiantes sean los protagonistas de sus aprendizajes.

En cuanto a la generación de un PIM por extensión de una tarea de resolución de problemas:

El proceso de generación de un PIM es una de las formas más cercanas y sencillas que tienen los profesores para acercar a sus estudiantes al proceso de descubrimiento en matemáticas y para que pongan en práctica los procesos cognitivos propios del quehacer cotidiano de los matemáticos profesionales.

Este proceso puede ser muy accesible para el profesor, ya que, en cuanto añada preguntas a una tarea de resolución de problemas o plantee problemas relacionados con el inicial, ya está extendiéndolo y generando nuevos problemas. La práctica y la reflexión sobre ella hará el resto.

Los profesores interesados en los PIM o en otras tareas que desarrollan procesos de investigación, deben plantearse un acercamiento paulatino, comenzando con miniPIM, con tareas de acercamiento a la investigación menos complejas, problemas abiertos, extensión de tareas de resolución de problemas, o mediante investigaciones con guiones orientativos para los estudiantes. En todas ellas, los estudiantes deberán elaborar pequeños informes que recojan el proceso, los resultados y sus reflexiones.

El proceso de acercamiento paulatino proporcionará experiencia en los estudiantes y les permitirá adquirir los conocimientos necesarios (de tipo procedimental y actitudinal) para plantearse tareas más complejas.

8.4.2. Sobre ejemplos, contraejemplos, razonamientos y analogía

La segunda cuestión de investigación, el trabajo con ejemplos y contraejemplos, la construcción de razonamientos y el uso de la analogía en procesos de conjeturación y justificación de argumentos y razonamientos, también tiene unas implicaciones para la clase de matemáticas. Algunas de ellas las presentamos a continuación.

El trabajo con ejemplos y contraejemplos está poco valorado en el aula, ya que el profesor tiende a la descripción de procesos generales y no suele pararse a presentar particularizaciones de interés.

Los ejemplos, como casos particulares en procesos de búsqueda de patrones para la construcción y justificación de conjeturas, construcción de demostraciones, tienen una importancia capital y no han sido suficientemente ponderados en el aula. Pueden contener estructuras abstractas subyacentes, necesarias para la búsqueda de patrones en el trabajo con conjeturas, construcción de generalizaciones y planteamiento de demostraciones.

Es necesario que los profesores sean los primeros que se acostumbren a convivir con la incertidumbre que se genera en los procesos de resolución de problemas, trabajo con conjeturas, o en la construcción de demostraciones. De esta manera, cuando planteen actividades investigadoras a sus estudiantes, no proyectarán sobre ellos su inseguridad y/o ansiedad, sino que les enseñarán a canalizarlas de forma controlada.

Los procesos de demostración, de trabajo con conjeturas y de resolución de problemas están regidos por razonamientos de tipo abductivo que se concretan en patrones de razonamiento que conllevan una cierta incertidumbre. Esta lógica no demostrativa genera, en los profesores, un cierto nivel de inseguridad, que no se da si se dedican al planteamiento de tareas cerradas, algorítmicas, de camino único, con las metas fijadas, etc. De ahí que el profesor se sienta más seguro con este tipo de tareas y no se aventure a entrar en procesos más abiertos en los que podría proyectar sus inseguridades en los estudiantes.

La analogía es un proceso cognitivo muy importante en las tareas que conllevan actividad investigadora, que es muy poco trabajada en el aula, al menos de forma explícita y planificada.

En clase, con frecuencia, el profesor razona y utiliza procedimientos y métodos que son precedidos por las expresiones: *análogamente*, *de forma análoga,* etc. pero muy pocas veces se para a explicar a los estudiantes el significado de la analogía y los diferentes usos que se puede hacer de ella: para la identificación de analogías, para proceder por analogía, para descubrir conexiones entre contextos, piezas fundamentales en los procesos de descubrimiento.

8.4.3. Sobre los conocimientos del profesor y los PIM

La tercera cuestión de la investigación, que se refiere a los conocimientos del profesor en relación con los PIM, también nos ha permitido profundizar en el marco del conocimiento especializado del profesor (conocimientos de contenido matemático y conocimiento didáctico de contenido matemático) y sacar algunas conclusiones dirigidas al trabajo del profesor en el aula.

El profesor debe plantearse, continuamente, la mejora de sus conocimientos matemáticos y didácticos, de manera que sus creencias (epistémicas y sobre la enseñanza y el aprendizaje) tengan un carácter más dinámico y no sean tan estáticas e inamovibles. Los PIM son un buen instrumento para que el profesor se plantee, junto con sus estudiantes,

retos y preguntas que cuestionen algunas facetas de sus conocimientos y creencias, haciéndole entrar en dinámicas de reflexión y mejora de su marco de conocimientos y de creencias sobre el conocimiento matemático y la práctica educativa.

En la investigación se han categorizado diferentes tipos de modificaciones en los conocimientos del profesor, desde el refuerzo y consolidación de conocimientos hasta la sustitución de conocimientos erróneos, pasando por reacomodación, sustitución parcial, etc. En todos ellos, las creencias matemáticas del profesor (epistémicas o del aprendizaje) tienen un papel y una influencia grandes, tanto en las decisiones de modificaciones en los conocimientos como en la generación y consolidación de conocimientos de contenido y didácticos de contenido (correctos o erróneos).

Las aportaciones de los PIM al pensamiento del profesor (conocimientos y creencias) marcan de una manera muy significativa la evolución del investigador en su faceta de profesor

La investigación llevada a cabo ha sido una oportunidad de reflexión y profundización sobre unos temas de los que como profesor venía practicando y desarrollando, aunque de manera más intuitiva que científica (o seriamente fundamentada). A este respecto, la dinámica generada como profesor-investigador hace que cada uno de estos roles alimente al otro; es decir, que la faceta de profesor ayuda a la de investigador, pues los análisis del investigador son facilitados enormemente por unas prácticas y experimentaciones de aula del profesor realmente planificadas y dirigidas hacia la búsqueda de respuestas a las preguntas y problemas planteados. Esta planificación certera del profesor está retroalimentada por la faceta del investigador, que influye en que adopte una actitud crítica con lo que hace, cuestione su propio pensamiento como profesor, y se produzcan mejoras y modificaciones en su pensamiento.

8.5. IMPLICACIONES PARA EL FUTURO

Aunque algunas de las conclusiones del apartado anterior son implicaciones de futuro para la enseñanza de las matemáticas, debemos terminar este punto haciendo lo mismo en relación con futuras investigaciones en Educación Matemática, relacionadas con la investigación llevada a cabo.

En este caso, varios de los puntos débiles de los resultados de la investigación generan, de manera natural, preguntas e interrogantes propios de problemas de investigación. Recogemos los que, a nuestro juicio, son más interesantes:

En las fases que estructuran un PIM, los estudiantes tienen que llevar a cabo una multitud de tareas, en las que ponen en práctica procesos cognitivos de diferente naturaleza. ¿Cuáles son esos procesos cognitivos? ¿Cómo los integra el estudiante en sus esquemas mentales?

La analogía tiene un papel primordial en los PIM, en relación con la búsqueda de patrones válidos para diferentes contextos. ¿Hay más usos de la analogía que los que se han identificado en este trabajo? ¿Con qué otros procesos cognitivos, diferentes a particularizar y la generalizar, puede estar relacionada?

Las creencias matemáticas del profesor son un factor clave en la generación de cambios en su marco personal de conocimientos de contenido y didácticos de contenido. ¿Cómo actúan las creencias del profesor en la modificación de los conocimientos del profesor? ¿Qué papel juegan en los cambios? ¿Hacen de filtro en algunos tipos de conocimientos?

Los patrones de razonamiento plausible son muy útiles en el trabajo con conjeturas, dentro del proceso de resolución de problemas o de construcción de una demostración. ¿Se conocen todos los patrones posibles?

8.6. REFLEXIONES PERSONALES

El final de la presentación de esta tesis va a consistir en una reflexión personal, con el nivel de subjetividad propio de una actividad de estas características, sobre el trabajo realizado. No es el momento de acordarse de lo negativo; es más, los malos momentos están ya en el olvido:

1. La novedad y complejidad de los contenidos de la investigación ha sido grande y el trabajo desarrollado ha sido muy amplio y profundo, inimaginable antes de comenzarlo.

2. Algunos análisis han sido muy dificultosos, por la cantidad y complejidad de las ideas que se han manejado. En esos momentos surgen dudas sobre si merece la pena continuar o, por el contrario, los problemas parecen irresolubles y la tarea rebasa las posibilidades personales. Pero más tarde, se sale del *tunel,* sobre todo gracias a las orientaciones y los ánimos de los directores, algo muy de agradecer e impagable.

3. El proceso de investigación ha servido para disfrutar y para sufrir. Disfrutar al obtener cualquier resultado, al descubrir algún matiz nuevo en los análisis realizados o en los conocimientos utilizados; también para sufrir cuando surge alguna dificultad, bloqueo o atasco.

4. Quizás, la investigación ha intentado tratar demasiadas cuestiones problemáticas. Pero una vez realizado el trabajo, volviendo la vista atrás, los resultados y soluciones encontrados transmiten la certeza de que globalmente se ha trabajado satisfactoriamente.

5. Resultan impensables la cantidad de cambios y transformaciones profesionales y personales que se producen en un proceso de estas características. Realmente ha sido un viaje interior a la búsqueda del conocimiento, con muchos avatares y nuevas sensaciones. A este respecto debemos destacar la dinámica generada por el binomio profesor-investigador, en el que cada una de las facetas alimenta a la otra en un proceso de retroalimentación que contribuye significativamente a la mejora del pensamiento del profesor y su práctica.

6. Aunque inicialmente tuve muchas dudas sobre la conveniencia o no de embarcarme en un proyecto de esta características, entre otras cosas por mi edad, la verdad es que se ha ido convirtiendo, con el tiempo, en un reto personal que, a la vista de los resultados, ha merecido la pena; los objetivos planteados, a nivel

científico y, por qué no decirlo, a nivel personal, se han alcanzado en un nivel bastante satisfactorio.

CAPÍTULO 9. REFERENCIAS BILIOGRÁFICAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* p. 205-224.

Aguilar, A. y otros, (2013) El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM.* p. 5063-5069. Montevideo, Uruguay.

Ärlebäck, J. B. (2010). Towards understanding teachers' beliefs and affects about mathematical modeling. Proceedings of CERME 6, pág. 2096-2105, Lyon, France.

Artigue, M., Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Educations*. The Fibonacci Proyect. Francia. www.fibonacci-proyect.eu

Artigue, M; Blomboj, M. (2013). Conceptualizing Inquiry-Based in Mathematics Educations. En *ZDM Mathematics Educations*, 45, p. 797-810. Alemania.

Bailey, J. (2007). Mathematical investigations: A primary teacher educators narrative journey ofprofessional awareness. En Watson, J. y Beswick, K. (Editores.) *Proceedings of the 30th annualconference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice* (Vol. 1, p. 103-112). MERGA, Adelaida, Australia.

Bakker, A.; van Eerde, D. (2013). *Doing qualitative research: methodology and methods in mathematics education*. Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Universidad de Utrecht, Holanda.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élevès de College*. Tesis Doctoral. Universidad Joseph Fourier. Grenoble, Francia..

Ball, D. B; Hoover Thames M. H.; Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? Journal of Teacher Education Vol. 59, nº 5, pág. 389-407.

Ball, D.L. y Cohen, D. (1996). Reform by the book: what is – or might be- the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher,* 25 (9), 6-8, 14.

Ball, D.L., Hill, H.C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American educator*, (nº 2005), pág. 14-46.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), pág.. 389-407.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-based research: putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), pág. 1-14.

Bass, H: (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. La Gaceta de la RSME, 10(3), pág. 689-706.

Bastow, B., Hughes, J., Kissane, B., & Mortlock, R. (1991). *40 mathematical investigations*. Ed. Mathematical Association of Western Australia, Western Australia.

Becker, J. P., y Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Ed. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Estados Unidos.

Beguin, P. (2003) Design as a mutual learning process between users and designers. *Interacting with Computers* 15 (2003) pág. 709–730.

Beguin, P; Rabardel, P, (2000). Designin for instrument-mediated Activity. *Scandinavian Journal of Information Systems*, 12, pág. 173-190.

Blombreg, J., Suchman, L., Trigg, R.H., (1996). Reflection on a work oriented design project. Human–Computer Interaction 11 (3), pág. 237–266.

Braverman A., Samovol, P. (2008). Creativity: transforming problem solving to the research. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord. Simposium 2: *Mathematical creativity and giftedness in secondary school*) *CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students.* Pág. 398-399. Haifa, Israel.

Braverman, A. (2006). *Systematic implementation of inquiry projects in secondary school mathematics for the development of students' creativity*. Tesis Doctoral, Universidad Ben-Gurion de Negev, Beer-Sheva, Israel.

Braverman, A., (2010). *Systematic Implementation of Inquiry Projects in Secondary School Mathematics for the Development of Students' Creativity*. Tesis Doctoral. Universidad Ben-Gurion de Negev, Israel.

Brown, J.; Edwards, I.; Galbraith, P.; Stillman, G. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. En J. Watson & K. Beswick (Edit) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* pág. 688-697. Ed. MERGA, Inc, Adelaida, Australia.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Carrillo, J.; Flores, E. et. al. (2015) Mathematic Teachers Specialised Knowledge: un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor. En I. Mª Gómez-Chacón et. al (Eds.) Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium. (pp. 459-470). Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Cai, J. y Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solve their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 27*(3), pág. 43-72.

Chow, I. Y. P. (2004). *Impact of open-ended problem solving as an alternative assessment on secondary one mathematics students.* Tesis doctoral. Universidad Tecnológica de Nanyang, Instituto Nacional de Educación, Singapur.

Civil, M. (2002). Everyday mathematics, mathematicians' mathematics, and school mathematics: Can we bring them together? En Yackel, E; Brenner, M. E; J. N. Moschkovich, J. N. (Editores). *Everyday and academic mathematics in the classroom* (pp. 40-62). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Estados Unidos..

Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics Counts. Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr W H Cockcroft.* Edit HMSO, Londres. (1ª Edición en castellano (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* MEC, Madrid).

Da Ponte, J.P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM* nº39, pág. 419–430.

De Bono, E. (1976). *Teaching thinking.* Edit. Temple Smith, Londres, Reino Unido.

Delaney, K. (1996). Exploring difficulties in teaching mathematics through investigations in the primary classroom. *For the Learning of Mathematics, 16*(1), pág. 27-33.

Doerr, H. M., (2006). Teachers' Ways of Listening and Responding to Students' Emerging Mathematical Models. *ZDM*, Vol. 38 (3), pág. 255-268.

Dreyfus, T. (2008) Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model. En Goos, M; Brown, R; y Makar, K. (Editores) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Ed. Merga, Australia.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Ed. Falmer Press, Londres, Reino Unido.

Even, R.; Karp, A. (2008). Mathematical creativity and giftedness in teacher professional development. En Even, R.; Karp, A. (Coord. Simposium 4: Mathematical creativity and giftedness in teacher professional development) CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students. Pág. 398-399. Haifa, Israel.

Fennnema, E. y Franke, L.M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D.A. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, (147-164). McMillan: New York.

Flores-Medrano, E. Montes, M. A.; Carrillo, J.; Contreras, L. C; Muñoz-Catalán, M. C.; Liñán, M. M. (2016) El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático, In I. M Gómez-Chacón and L. Vivier (Eds.) *Mathematical work: the role of teacher, knowledge and interactions, Special Issue, BOLEMA Journal (Mathematics Education Bulletin)* (en prensa).

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. En A. Orton y G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics*, pág. 150-173. Cassell, Londres.

Galbraith, P., Stillman, G., (2006). A Framework for Identifying student blockages during transitions in the modelling process. ZDM, vol 38 (2), p. 143-162.

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En: Van den Akker, J.; Gravemeijer, K; McKenney, S. y Nieveen, N. (Eds). *Educational design research.* pág.17-51. *Ed.* Routledge, Londres, Reino Unido.

Gueudet G., Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. En *Éducation et didactique* [publicación electrónica], vol 2 - n°3, URL: http://educationdidactique.revues.org/342. Consultado el 15-01-15.

Gueudet, G; Trouche, L. (2010a). Ressources en ligne et travail collectif enseignant: accompagner les evolutions de pratique. En Mottier Lopez, L., Martinet, C., y Lussi, V

(Edit). *Actes du Congres Actualite de la Recherche en Education*. pág.1-10. Ed. Universidad de Génova, Suiza.

Gueudet, G; Trouche, L, (2010b). Renouvellement des ressources et de l'activit_e des professeurs, renouvellement du regard sur une profession. Coloquio: Le travail enseignant au XXie siecle. INRP, Lyon, Francia.

Guin, D., y Trouche, L. (2002). *Calculatrices symboliques: transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Edit. La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.

Guin D. y Trouche L. (2007) Une approche multidimentionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques? En Baron, M; Guin, D; y Trouche, L. (Eds.), *Ressources numériques et environnements d'apprentissages informatisés: conception et usages, regards croisés.*, pág. 197-228. Ed. Hermés, Paris, Francia

Guzmán, M. de, (1991) Para pensar mejor. Edit. Labor, Barcelona. (1994. Edit. Pirámide, Madrid.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. En S. Campbell & R. Zazkis (Eds.): *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185–212). Edit. Ablex Publishing Corporation, Norwood, Nueva Jersey, Estados Unidos.

Henderson, K. B., & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. En Fehr, H. F. (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (pp. 228-270). National Council of Teachers of Mathematics, Washington, Estados Unidos.

Hershkovitz, S; Peled, I; Littler, G. H; (2008). Mathematical creativity and giftedness in elementary school. En Hershkovitz, S; Peled, I; Littler, G. H (Coord. Simposium 1): CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students. Pág. 382-383. Haifa, Israel.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry.* Ed. Falmer Press, Londres, Reino Unido.

Jirotková, D., Littler, G. (2008) Mathematical tasks that promote creativity in elementary school mathematics. En Hershkovitz, S; Peled, I; Littler, G. H (Coord. Simposium 1). CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students. Pág. 382-383. Haifa, Israel.

Junta de Castilla y León (JCYL), (2012). ORDEN EDU/551/2012, de 9 de julio, por la que se regula la implantación y el desarrollo del Bachillerato de Investigación/Excelencia en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León* (18-julio-2012). Junta de Castilla y León, Valladolid.

Junta de Castilla y León, JCYL, (2007). DECRETO 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. En *BOCYL* (23-05-07). Ed. Junta de Castilla y León, Valladolid.

Junta de Castilla y León, JCYL, (2008). DECRETO 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. En *BOCYL* (11-06-08). Ed. Junta de Castilla y León, Valladolid.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, (27), pág. 29-63.

Lee, M., y Miller, M. (1997). *Real-life math investigations: 30 activities that help students apply mathematical thinking to real-life situations*. Edit. Scholastic Professional Books, New York, Estados Unidos.

Legrand, M., (1986). *Genèse et étude sommaire d´une situations codadidactique: le debat scientifique en situation de enseignement*. Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l´Informatique. La Pensée sauvage, Francia.

Legrand, M., (1991). Les compétences scientifiques des etudiants sont elles indépendantes de la facon dont nous leur presentonsla sciencie? *Gacette des mathématiciens,* Suplément nº 48, Francia.

Legrand, M., (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica,* p. 171-190. Ed. Topiques, Frouard, Francia.

Leontiev, A. N, (1975). *Activité conscience, personnalité*. Edit Progress, Moscú, Rusia.

Leontiev, A. N., (1981). *Problems in the Development of Mind*. Edit Progress, Moscú, Rusia.

Leontiev, A. N, (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Edit Prentice Hall, Englewoo Cliffs, Estados Unidos.

Leplat, J., (2000). L'analyse psychologique du travail en ergonomie (Psychological analysis of work in ergonomics), Edit Octarès, Toulouse, Francia.

Lester, F. K., Jr. (1980). Problem solving: Is it a problem? En Lindquist, M. M. (Ed.), *Selected issues in mathematics education*, pág. 29-45. Ed. McCutchan, Berkeley, Estados Unidos.

Maaß K., (2005). Modellling Task for Low achieving students. First results of an empirical study. En Pitta – Pantazi, D. y Philippou, G. (edit): Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education(CERMES 5), p. 2120, 2129. Chipre.

Mason, J; Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. Edit. Routledge Falmer, Londres, Reino Unido.

Mason, J. (2002). Minding Your Qs and Rs: effective questioning and responding in the mathematics classroom. En L. Haggerty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, pág. 248-258. Edit Routledge Falmer, Londres,.

Mason, J. (2003). Structure of attention in the learning of mathematics. En J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching*, pág. 9-16. Ed. Charles University, Praga, República Checa.

Mason, J. (2004). Doing ≠ Construing and Doing + Discussing ≠ Learning: The Importance of the Structure Of Attention. ICME 10 Regular Lecture. En M. Niss (Ed.) *Proceedings of ICME 10*. Edit IMFUFA, CD. Roskilde, Dinamarca.

Mason, J. (2006). Micro-Structure of Attention in the Teaching and Learning of Mathematics. *Proceedings of the Mathematics Teaching 2005 Conference, Edinburgh: Edinburgh Centre for Mathematical Education*. Pág. 36-41.

Mason, J. (2010). Attention and Intention in Learning About Teaching Through Teaching. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning Through Teaching Mathematics: development of teachers' knowledge and expertise in practice*. Pág. 23-47. Edit Springer, Nueva York.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Edit Addison-Wesley, Wokingham, Reino Unido. (Existe traducción al español (1988): *Pensar matemáticamente.* Edit Labor y MEC, Barcelona).

Mason, J., Johnston-Wilder, S. (2004). Fundamental constructs in mathematics education. Ed. Routledge Falmer, Londres, Reino Unido.

Mason, J., Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. En *Educational Studies in Mathematics*, nº 15, pág. 227–289.

Mason, J., y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks.* Publicaciones Tarquin, Albans, Reino Unido.

Mason, J.; Stephens, M.; Watson, A. (2009) Appreciating Mathematical Structure for All. Mathematics Education Research JournaL, pág. 10-32. Vol. 21, nº 2.

McCosker, N. y Diezmann, C. M. (2009) Scaffolding students'thinking in mathematical investigations. En Australian Primary Mathematics Classroom, 14(3). pp. 27-32.

McKenney, S.; Nieveen, N. y Van den Akker, J. (2006). Design research from a curriculum perspective. En: Van den Akker, J.; Gravemeijer, K; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). *Educational design research.* Pág 62-90 *Ed.* Routledge, Londres, Reino Unido.

MECD, (2007). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establece el currículo de la ESO. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (BOE, 6-noviembre-2007), Madrid.

MECD, (2007a). Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece el currículo de Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (BOE, 5-enero-2007), Madrid.

MECD, (2015). Real Decreto 11052014 de 26 de diciembre, por el que se establecen los currículos de ESO y Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (BOE, 3 de enero de 2015), Madrid.

Meredith, A. (2005). Terry's learning: Some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. Cambridge Journal of Education, 25(2), 175-187.

Moschkovich, J. N. (2002). An introduction to examining everyday and academic mathematical practices. En Yackel, E; M. E. Brenner; J. N. Moschkovich (Editores). *Everyday and academic mathematics in the classroom*, pág. 1-11. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Valtimor, Estados Unidos.

Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, Ç. Haser, &

M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of CERME8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía.

National Council of Teachers of Mathematics, (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Ed. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Valtimor, Estados Unidos.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teachingmathematics.* Ed. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Valtimor, Estados Unidos.

Nieveen, N.,(1999). Prototyping to reach product quality. En van den Akker, J; Branch, R.M.; Gustafson, K; Nieveen, N.; y Plomp, T. (Eds): *Design approaches and tools in education and training*. Pág. 125-136. Ed. Kluwer Academic, Boston, Estados Unidos.

Nieveen, N.; McKenney, S.; y Van den Akker, J. (2006). Educational design research: the value of variety. En Van den Akker, J.; Gravemeijer, K; McKenney, S; y Nieveen, N. (Eds): *Educational design research.* Pág.151-158. Ed. Routledge, Londres, Reino Unido.

Orton, A., y Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics.* Ed. Cassell, Londres, Reino Unido

Pédauque, R. T. (2006). *Le document à la lumière du numérique.* Ed. C y F, Caen, Francia.

Pedemonte, B (2007). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. En Pitta-Pantazi, D & Philippou, G (Edit) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*. Pág. 643-652. Larnaca, Chipre.

Pedemonte, B., Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. En *ZDM Mathematics Education* nº 43, pág. 257–267.

Peirce C. S. (1960): *Collected papers* Cambridge, Ed. University Press, Harvard, Estados Unidos

Petrou, M y Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), Mathematical Knowledge in Teaching, (9-25). Springer: New York

Petrou, M. (2009). Cypriot preservice teachers' content knowledge and its relationship to their teaching. Unpublished doctoral dissertation, University of Cambridge, Cambridge, UK.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom: A guide for teachers*. Ed. Macmillan, Basingstoke, Reino Unido.

Plomp, T., (2007) Educational Design Research: an Introduction. En Nieveen, N., Plomp, T (Eds): *An introduction to educational design research*, pág. 1-32, Ed. Routledge, Londres, Reino Unido.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton University Press, USA. Existe traducción al castellano en 1965: Cómo plantear y resolver problemas. Edit Trillas, Mexico.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Edit. University Press, New Jersey. Existe traducción al castellano en 1966: *Matemáticas y razonamiento plausible.* Edit. Tecnos, Madrid.

Polya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Edit. Tecnos, Madrid.

Polya, G. (1962-1965). Mathematical Discovery (vol 1 y 2). Wiley, Nueva York.

Rabardel P., y Béguin, P. (2005). Instrument Mediated Activity: From Subject Development to Anthropocentric Design. *Theoretical Issues in Ergonomics Sciences*. 6 (5), pág. 429-461.

Rabardel, P., (2001). Instrument mediated activity in situations. En Blandford, A., Vanderdonckt, J., Gray, P. (Edit.) *People and Computers XV—Interaction Without Frontiers*. Edit Springer-Verlag, pág. 17–30.

Rabardel, P; Bourmaud, G, (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting whit computers,* 15, pág. 665-691.

Reeves, T.C. (2006). Design research from a technology perspective. En Van den Akker, J.; Gravemeijer, K.; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds): *Educational design research,* pág.5-26. Ed. Routledge, Londres, Reino Unido.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L. y Suydam, M. N. (2004). *Helping children learn mathematics*. Ed. John Wiley y Sons, Hoboken, Nueva Jersey, Estados Unidos.

Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. In: A. Gagatsis (Ed.), Proceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education (pp. 69–81). Nicosia: Cyprus Mathematical Society.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. In: S. Close, D. Corcoran, & T. Dooley (Eds.), Proceedings of the 2nd national conference on research in mathematics education (pp. 14–27). Dublin: St Patrick's College.

Samurcay R. y Rabardel P. (2004). Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. En R.Samurçay y P. Pastré (dir.): *Recherches en didactique professionnelle,* pág. 163-180. Ed. Octarès, Toulouse, Francia.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Edit. Academic Press, Orlando, Estados Unidos.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En Voss, J. F., Perkins, D. N. y Segal, J. W. (Eds.) *Informal reasoning and education* (pág. 311-343). Ed. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, Estados Unidos.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En Grouws D. A. (Editor), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Edit. National Council of Teachers of Mathematics y Ed. Macmillan, Reston, (Valtimor), Estados Unidos.

Sheffield, L. J., Meissner, H., y Foong, P. Y. (2004). *Developing mathematical creativity in young children.* Paper presentado en el International Congress on Mathematical Education, Copenhague, Dinamarca.

Shriki, A. (2008). Assisting teachers to develop their students'creativity in mathematics–implementing the "what-if-not?" strategy. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord. Simposium 2: *Mathematical creativity and giftedness in secondary school) CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students.* Pág. 408-410. Haifa, Israel.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), pág. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, pág. 1-22.

Stacey, Kaye. (2007) What is mathematical thinking and why is it important? En *Proceedings of APEC - Tsukuba International Conference 2007 "Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study (II)"- Focusing on Mathematical Thinking - .* Sapporo-Tokio, Japón.

Stylianides, A., y Ball, D.L., (2008). Studying the mathematical knowledge for teaching: the case of teachers' knowledge of reasoning and proof . En *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, California, Estados Unidos.

Teh, K. S., Loh, C, Y., Yeo, J., & Chow, I. (2007). *New syllabus mathematics workbook 1: Alternative assessment & CD included.* Ed. Shing Lee, Singapur.

Trouche, L. (2011). *Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques: histoire d'un cheminement de recherché*. Ed. Institut National de Recherche Pédagogique, Coirriel, Francia.

Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. En Van den Akker, J.; Branch, R.M.; Gustafson, K.; Nieveen, N.; y Plom, T. (Eds): *Design approaches antools in education and training.* Pag.1-14. Ed. Kluwer Academic, Boston, Estados Unidos.

Van den Akker, J.; Gravemeijer, K.; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). (2006). *Educational design research.* Ed. Routledge, Londres, Reino Unido.

Vasco Mora, D.; Climent, N.; Escudero-Ávila, D.; Montes, M: A.; Ribeiro, M. (2016) Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. En I. M Gómez-Chacón y L. Vivier (Eds.) *Mathematical work: the role of teacher, knowledge and interactions, Special Issue, BOLEMA Journal (Mathematics Education Bulletin)* (en prensa).

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23), p. 133-170.

Vergnaud , G., (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. En Noirfalise. R.; Perrin M-J. (Eds): *Ecole d'été de didactique des mathématiques*. pág. . 174-185. Universidad Clermont-Ferrand II, Francia.

Vergnaud, G. (1996b). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas, 26*(10), pág. 195-207.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), p. 167-181.

Vygotski, L.S. (1930, [1985]). La méthode instrumentale en psychologie. En B. Schneuwly, J.P. Bronckart (eds). *Vygotsky aujourd'hui*. Delachaux et Niestlé.

Vygotski, L.S. (1931, [1978]). *Mind and society.* Ed MIT Press, Cambridge, Reino Unido.

Wademan, M. (2005). Utilizing Development Research to Guide People Capability Maturity Model Adoption considerations. Tesis Doctoral, Universidad de Syracuse, New York, Estados Unidos.

Wertsch, J.V., (1997). Mediated action. En Bechtel, W., Graham, G. (Eds.): *A Companion to Cognitive Science.* Ed. Blackwell, Oxford, Reino Unido.

Wertsch, J.V., (1998). *Mind as Action.* Oxford University Press, New York, Estados Unidos.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry 17, 89–1.

Yeo, J. B. W, (2007) Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. *Mathematics and Mathematics Education.* Edit National Institute of Education, Universidad Tecnológica de Nanyang Singapur.

Yeo, J. B. W. (2008). Secondary school student investigating mathematics. En Goos, M; Brown, R; Makar, K. (Editores) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pág. 613-619. Ed. MERGA, Australia.

Yeo, J. B. W., y Yeap, B. H. (2009). Characterising the Cognitive Processes in Mathematical Investigation. *Mathematics and Mathematics Education*. Instituto Nacional de Educación, Universidad Tecnológica de Nanyang, Singapur.

Yeo, J. B. W; Yeap, B. H. (2009A). Investigating the processes of mathematical investigation. Paper presentado en el 3º Redesigning Pedagogy International Conference, Singapur.

Yeo, J.B.W; Yeap, B.H. (2009B). Mathematical investigation: task, process and activity. *Mathematics and Mathematics Education*. Technical Report ME2009-0. Instituto Nacional de Educación, Singapur.

Yin, R.K. (2003). *Case study research: design and methods.* Newbury Par (CA, USA): Sage Applied Social Research Methods Series, volume 5.

ANEXO 1

DOCUMENTO TP-YK

TERNAS PITAGÓRICAS

ÍNDICE

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema inicial que genera este trabajo es conocer qué son las ternas pitagóricas, cuáles son sus propiedades y cómo se obtienen las expresiones generadoras de estas ternas.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo de investigación matemática es profundizar e indagar en el interesante y maravilloso mundo de las ternas pitagóricas, con el propósito de conocer sus orígenes, propiedades, características más reseñables, aplicaciones, expresiones que las definen, etc.

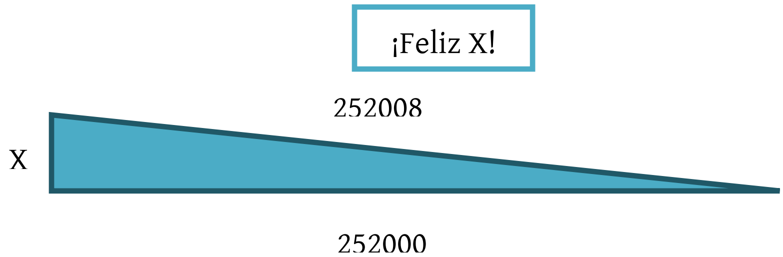
En primer lugar comenzaremos definiendo qué es una terna pitagórica y cuál fue su origen histórico. Posteriormente estudiaremos y demostraremos algunas de sus propiedades más importantes para más adelante realizar un análisis completo de las expresiones generales mediante las cuales se pueden obtener ternas.

En lo sucesivo aplicaremos los conocimientos adquiridos en esta investigación para resolver algunos problemas matemáticos empleando las expresiones previamente mencionadas.

Finalmente se presentarán dos demostraciones que nos proporcionarán las expresiones generales generadoras de ternas pitagóricas. La primera demostración será la atribuida a Diofanto de Alejandría, y la segunda corresponderá a un razonamiento personal destinado al mismo fin, la obtención de estas fórmulas.

¿QUÉ ES UNA TERNA PITAGÓRICA?

Imagine que recibe la siguiente felicitación de año nuevo:



Para despejar el valor de la incógnita X en este triángulo rectángulo basta con aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$X^2 + 252000^2 = 252008^2$$

$$X = \sqrt{252008^2 - 252000^2}$$

$$X = 2008$$

Solución: ¡Feliz 2008!

Es realmente sorprendente que unos números tan grandes cumplan este teorema y constituyan una terna pitagórica.

Una terna pitagórica es un conjunto de números naturales no nulos que satisfacen la siguiente ecuación propuesta por Pitágoras de Samos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Trasladando estos números a un triángulo rectángulo (esto es, donde uno de sus ángulos vale 90º) y haciendo corresponder el valor c a su hipotenusa (que será el lado mayor de dicho triángulo) y los valores a y b a sus dos catetos, obtenemos un *"triángulo pitagórico"*.

Además, podemos clasificar las ternas pitagóricas de la siguiente manera:

- Ternas pitagóricas primitivas: Son aquellas que cumplen que el máximo común divisor de *a*, *b* y *c* es 1.

- Termas pitagóricas no primitivas: Son aquellas que se obtienen a partir de las primitivas por diversos métodos, por ejemplo, efectuando el producto de los tres números por el mismo número natural.

Algunos ejemplos de ternas pitagóricas primitivas ya conocidas incluso por los babilonios son:

(3 , 4 , 5), (5 , 12 , 13), (8 , 15 , 17),

(9 , 40 , 41), (16 , 63 , 65), (28 , 45 , 33),

(36 , 77 , 85), (48 , 55 , 73), (65 , 72 , 97),

…

PROPIEDADES DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS

Ahora que sabemos qué es una terna pitagórica, procedamos a estudiar y demostrar algunas de sus propiedades más características:

Si a, b y c conforman una terna pitagórica, entonces se cumple que a, b y c no pueden ser los tres números impares simultáneamente.

Demostraremos esta propiedad aplicando el conocido método de reducción al absurdo, considerando que los tres componentes de la terna son impares hasta que lleguemos a una contradicción.

Para que *a*, *b* y *c* formen una terna pitagórica deben cumplir que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Supongamos que los tres números son impares, por tanto *a* y *b* son impares. El cuadrado de todo número impar es impar, y la suma de dos números impares siempre es par. Por lo tanto, si *a* y *b* fueran números naturales impares, c^2 sería par, pero la raíz cuadrada de todo número par es par, por lo que c sería par y no impar como previamente habíamos supuesto. Como hemos llegado a una contradicción lógica, pues nuestra suposición inicial se ha visto refutada, hemos demostrado por reducción al absurdo que los tres componentes naturales de una terna pitagórica no pueden ser impares simultáneamente. Hubiéramos obtenido la misma conclusión suponiendo pares a los lados *c* y *a* o *c* y *b*, pues en ambos casos el cuadrado del cateto restante sería igual a la resta de dos números impares (recordemos que el cuadrado de todo número impar es impar) que sería par, y por consiguiente el valor de este cateto sería par y no impar como se había supuesto.

En consecuencia, podemos encontrarnos ante los siguientes casos en una terna pitagórica:

- *a*, *b* y *c* todos pares: Entonces c^2 sería igual a la suma del cuadrado de dos números pares, que es par. Como el cuadrado de un número par es par, tenemos que c^2 sería par si se diese este caso, y por ende *c* también lo sería. Este tipo de terna sería no primitiva.
  Ejemplo: (6 , 8 , 10)
- *a* par y *b* y *c* impares.
  Ejemplo: (8 , 15 , 17)
- *b* par y *c* y *a* impares.
  Ejemplo: (9 , 40 , 41)

Los casos que no son posibles son los siguientes:

- Como se demostró previamente no pueden ser los tres lados del triángulo rectángulo impares simultáneamente.
- No puede darse la situación de que solo uno de estos números sea impar, pues esto supondría que la suma o resta (suma en caso de considerar *a* y *b* pares y resta en caso de considerar *a* y *c* o *b* y *c* pares) de los cuadrados dos números pares fuera impar, algo que no es posible.
- Tampoco es posible el caso de que la hipotenusa sea par y los dos catetos impares por lo siguiente:
  Si *a* y *b* son impares responderán a las siguientes expresiones:
  $$a = 2n + 1$$
  $$b = 2m + 1$$
  Por tanto, desarrollando la expresión del Teorema de Pitágoras:
  $$a^2 + b^2 = c^2$$
  $$(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = c^2$$
  $$4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = c^2$$
  $$4(n^2 + n + m^2 + m) + 2 = c^2$$

Inicialmente hemos supuesto que *c* era par; además, el cuadrado de un número par es siempre múltiplo de 4, mientras que por otra parte, la suma de los cuadrados de dos números impares es siempre un múltiplo de 2. En consecuencia, simplificando la igualdad por 2, resulta que un impar es igual a un par, lo que es absurdo.

Otra propiedad de las ternas pitagóricas sería la siguiente:

<u>*Si a, b y c conforman una terna pitagórica, entonces se cumple que na, nb y nc también son una terna pitagórica.*</u>

Demostraremos esta propiedad por un simple proceso de operatoria.

Si na, nb y nc forman una terna pitagórica deben cumplir que:

$$(na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$$

Desarrollando la expresión, tenemos que:

$$n^2a^2 + n^2b^2 = n^2c^2$$

$$\cancel{n^2}(a^2 + b^2) = \cancel{n^2}c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

cumpliéndose el Teorema de Pitágoras.

Por tanto, multiplicando los factores de una terna por un número positivo y entero (es decir, natural), siguen conformando una terna pitagórica, lo que nos lleva a pensar en la infinitud de ternas pitagóricas que existen. Esto lo demostró Euclides basándose en que la diferencia de dos cuadrados de números consecutivos siempre es impar. Al haber infinitos números impares (siendo algunos de ellos cuadrados perfectos) hay infinitos cuadrados impares, luego existen infinitas ternas pitagóricas.

Para concluir este apartado, citemos otras propiedades de las ternas pitagóricas:

- Uno de sus catetos debe ser siempre múltiplo de 3.
- Uno de sus catetos debe ser siempre múltiplo de 4.
- Uno de los números de la terna debe ser siempre múltiplo de 5.
- Todos los números impares pertenecen a una terna pitagórica primitiva.
- Todos los números primos pertenecen a una terna pitagórica primitiva original.
- Todos los números primos pertenecen a una única terna.

ESTUDIO DE LAS EXPRESIONES GENERADORAS DE TERNAS PITAGÓRICAS

Para comenzar, comprobemos que las ternas de números de la forma 2n + 1, $2n^2 + 2n$ y $2n^2 + 2n + 1$, siendo n cualquier número natural, forman una terna pitagórica: Para ello, desarrollaremos la expresión del Teorema de Pitágoras:

$$a = 2n + 1$$

$$b = 2n^2 + 2n$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n(n + 1) + 1)^2$$

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 = 4n^2 + (n + 1)^2 + 4n(n + 1) + 1$$

$$4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = 4n^2(n^2 + 2n + 1) + 4n^2 + 4n + 1$$

$$4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1$$

$$\cancel{4n^4} + \cancel{8n^3} + \cancel{8n^2} + \cancel{4n} + \cancel{1} = \cancel{4n^4} + \cancel{8n^3} + \cancel{8n^2} + \cancel{4n} + \cancel{1}$$

$$0 = 0$$

Por tanto, sí se forma una terna para cualquier valor de n. Llamaremos a esta expresiones forma 1 de generar ternas pitagóricas. Sin embargo, esta forma solo genera aquellas ternas en las que el cateto mayor y la hipotenusa son números consecutivos.

Procedamos ahora a hacer lo mismo, pero con la terna $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$, siendo a y b números naturales con a mayor que b.

$$p = a^2 - b^2$$

$$q = 2ab$$

$$r = a^2 + b^2$$

$$p^2 + q^2 = r^2$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

$$\cancel{a^4} - 2a^2b^2 + \cancel{b^4} + 4a^2b^2 = \cancel{a^4} + 2a^2b^2 + \cancel{b^4}$$

$$2a^2b^2 = 2a^2b^2$$

$$0 = 0$$

Por tanto, sí se forma una terna para cualquier valor de a y de b. Llamaremos a esta expresión forma 2 de generar ternas pitagóricas.

Estudiemos ahora si la terna que resolvimos en la felicitación (2008 , 252000 , 252008) responde a la forma 1 o a la forma 2:

- Con las expresiones de la forma 1 no se puede obtener, pues eso supondría considerar que uno de los tres números pares de la terna es impar, lo que es imposible.
- Sin embargo, con las expresiones de la forma 2 sí que se puede obtener dicha terna pitagórica, pues:

$$a^2 + b^2 = 252008$$
$$a^2 - b^2 = 252000$$
$$2ab = 2008$$

Sumando ambas expresiones, tenemos que:

$$2a^2 = 504008$$
$$a = 502$$
$$b = 2$$

Veamos ahora cuáles son todas las posibles formas de felicitar este año, el 2008:

Tenemos que 2ab debe valer 2008, ya que es el menor número de la terna, luego ab = 1004. Al descomponerlo en factores primos resulta que:

1004	2
502	2
251	251
1	1
1	

Por tanto, combinando los diversos factores primos de 1004, obtenemos todas las ternas que contienen a 2008, que son las siguientes:

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 251 \end{cases}$ → LADOS: 63017, 62985, 2008

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 502 \end{cases}$ → LADOS: 252008, 252000, 2008

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1004 \end{cases}$ → LADOS: 1008017, 1008015, 2008

Generemos con los conocimientos adquiridos todas las ternas posibles para los dos años siguientes a 2008, esto es, 2009 y 2010: Ternas de 2009:

Para obtener sus ternas debemos emplear las expresiones de la forma 1, ya que 2009, el lado menor de la terna, es un número impar:

$$2n + 1 = 2009$$

Por tanto, n vale 1004, y tenemos que:

$$2n^2 + 2n = 2018040$$

$$2n^2 + 2n + 1 = 2018041$$

En este caso, solo hay una terna posible, que formaría un triángulo rectángulo de lados:

LADOS:
2018040, 2018041, 2009

Para esta situación, ya que 2010 es un número natural par, emplearemos la forma 2 de generar ternas pitagóricas: 2ab = 2010 ; ab = 1005

$$\begin{array}{r|l} 1005 & 3 \\ 335 & 5 \\ 67 & 67 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

Procediendo de forma anál[illegible]os anteriormente, las ternas que contienen a 2010 son las siguientes:

$\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 335 \end{array} \right. \longrightarrow$ LADOS: 112234, 112216, 2010

$\left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 201 \end{array} \right. \longrightarrow$ LADOS: 40426, 40376, 2010

$\left\{ \begin{array}{l} a = 67 \\ b = 15 \end{array} \right. \longrightarrow$ LADOS: 4714, 4264, 2010

$a = 1$

$b = 1005$

$\longrightarrow$

LADOS:

1010026, 1010024, 2010

Para generar todas las posibles ternas del año en que nos encontramos, procedeos de forma similar, pues 2012 es un año par:

$$2ab = 2012$$

$$ab = 1006$$

$$\begin{array}{r|l} 1006 & 2 \\ 503 & 503 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

En consecuencia, podemos formar las siguientes ternas con 2012:

$a = 2$

$b = 503$

$\longrightarrow$

LADOS:

253013, 253005, 2012

$a = 1$

$b = 1006$

$\longrightarrow$

LADOS:

1012037, 1012035, 2012

ORIGEN Y DEMOSTRACIÓN DE LAS EXPRESIONES DE LA FORMA 2 DE OBTENER TERNAS PITAGÓRICAS

El matemático de la Escuela de Alejandría Diofanto, demostró el origen de estas expresiones generadoras de ternas pitagóricas. Para ello aplicó y utilizó las ideas de terna pitagórica primitiva y derivada, junto con otros razonamientos.

Esta fue su ingeniosa demostración:

En primer lugar, es preciso distinguir dos tipos de ternas pitagóricas: las primitivas y las no primitivas (donde todos los componentes de la terna son divisibles por un mismo número natural).

Si $x^2 + y^2 = z^2$ es una terna pitagórica primitiva, no es posible, por tanto, que exista un número natural que divida a x e y, pues entonces dividiría a $x^2 + y^2 = z^2$, y por lo tanto, dividiría a z. Recordemos además según lo demostrado en el cuarto apartado de esta investigación que en una terna pitagórica primitiva la hipotenusa siempre es impar (solo puede ser par en ternas no primitivas), y que si uno de los catetos es par el otro es impar y viceversa. Por tanto, la hipotenusa (que llamaremos z) siempre es impar, y si consideramos que y es el cateto impar y x el par, tenemos que (z + y) y (z – y) son pares, ya que la suma y resta de dos números impares así lo es. En consecuencia, tanto x como (z + y) y (z – y) son pares, por lo que podemos proceder con el siguiente cambio de variable.

$$x = 2u$$

$$z + y = 2v$$

$$z - y = 2w$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

$$(2u)^2 = 2v \,.\, 2w$$

$$4u^2 = 4vw$$

$$u^2 = vw \quad \text{Siendo } v > 0 \text{ y } w > 0$$

Por otro lado, resulta lo siguiente:

$$v = \frac{z+y}{2}\,;\; w = \frac{z-y}{2}$$

$$v + w = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z$$

$$v - w = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = y$$

Como $u^2 = vw$ (con v y w > 0), podemos deducir que tanto v como w deben ser cuadrados, es decir, ambos han de contener cada número primo un numero par de veces, pues de esta forma le ocurre a u. En consecuencia, podemos considerar que $v = a^2$ y que $w = b^2$. Entonces, tenemos que:

$$z = v + w = a^2 + b^2$$

$$y = v - w = a^2 - b^2$$

Por tanto:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$x^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$$

$$x = 2ab$$

Obteniéndose las expresiones:

$$x = 2ab$$

$$y = a^2 - b^2$$

$$z = a^2 + b^2$$

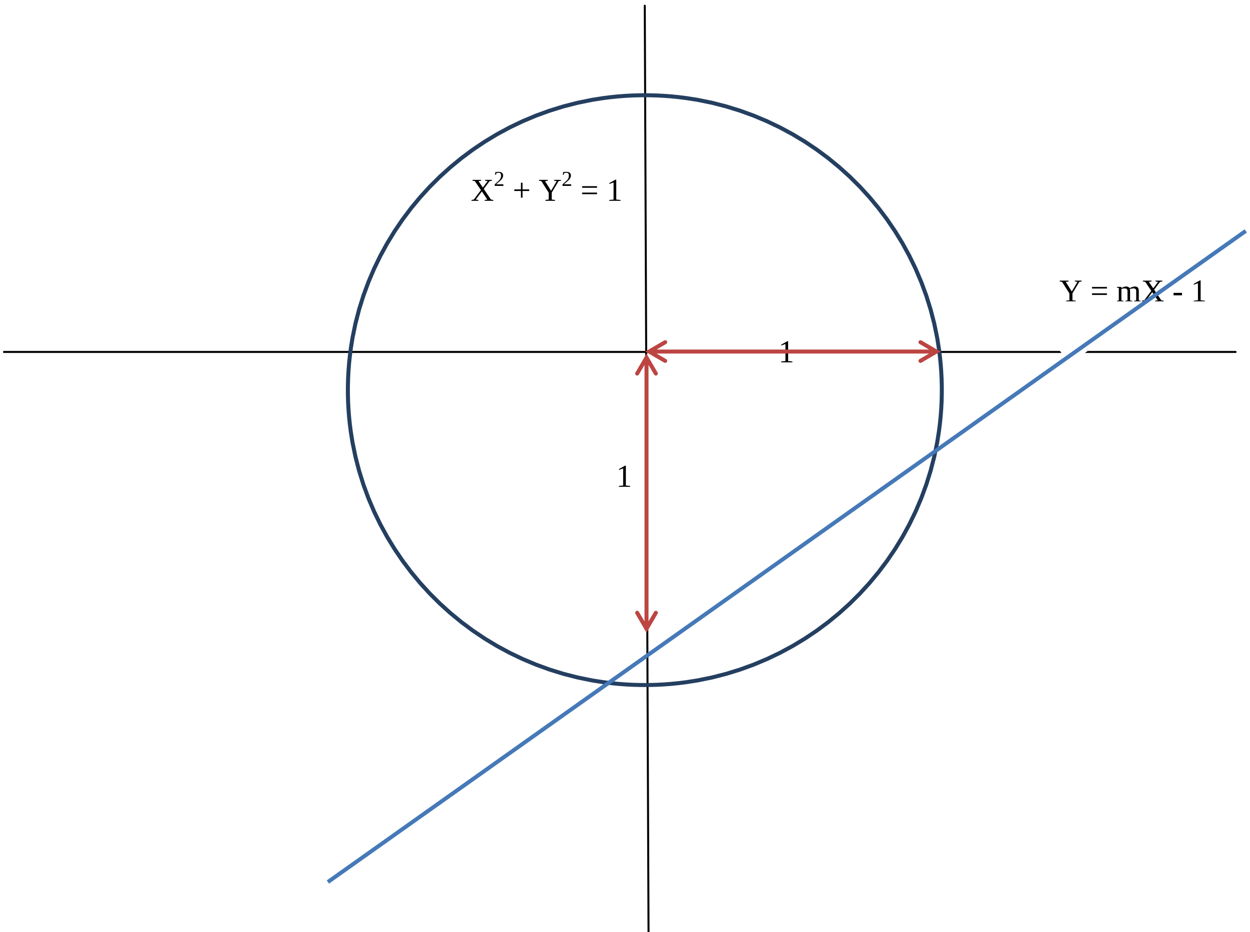
En lo siguiente, se presenta otra demostración de estas expresiones partiendo de la búsqueda de las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Dividiendo por z^2:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

Denominando $\left(\frac{x}{z}\right) = X$, $\left(\frac{y}{z}\right) = Y$, resulta que encontrar las soluciones enteras de $x^2 + y^2 = z^2$ equivale a encontrar las soluciones racionales de la ecuación $X^2 + Y^2 = 1$, es decir, tenemos que demostrar que esta circunferencia tiene puntos con coordenadas racionales.



Los puntos pertenecientes a esta circunferencia serán racionales si contactan con las rectas pertenecientes al haz Y = mX – 1 (con m perteneciente a Q). Estas rectas tan solo difieren unas de otras en su pendiente, pues su ordenada en el origen tiene el mismo valor (todas ellas pasan por el punto de coordenadas (0, –1)). Por tanto, para resolver este sistema podemos sustituir el valor de Y tomado del haz de rectas en la ecuación de la circunferencia de radio 1:

$$1^2 = X^2 + Y^2$$

$$1^2 - X^2 = Y^2 = (mX - 1)^2$$

$$\cancel{1^2} - X^2 = m^2X^2 - 2mX + \cancel{1^2}$$

$$2mX = m^2X^2 + X^2$$

$$2m\cancel{X} = \cancel{X}(m^2X + X)$$

$$2m = X(m^2 + 1)$$

$$X = \frac{2m}{m^2+1}$$

Como $Y^2 = 1^2 - X^2$:

$$Y^2 = 1^2 - \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2$$

$$Y^2 = 1 - \frac{4m^2}{(m^2+1)^2} = \frac{(m^2+1)^2 - 4m^2}{(m^2+1)^2}$$

$$Y^2 = \frac{m^4 + 2m^2 + 1^2 - 4m^2}{(m^2+1)^2} = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{(m^2+1)^2}$$

$$Y^2 = \frac{(m^2 - 1)^2}{(m^2+1)^2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{x}{z} = \frac{2mn}{m^2+1}$$

$$Y = \frac{y}{z} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

Igualando los numeradores y los denominadores por separado obtenemos las expresiones deseadas:

$$x = 2mn$$

$$y = m^2 - 1$$

$$z = m^2 + 1$$

CONCLUSIÓN

Las ternas pitagóricas nunca dejarán de asombrarnos. Desde los babilonios hasta nuestros días la generación de estas ternas ha sido objeto de estudio humano, los primeros las utilizaban para conseguir ángulos rectos en sus construcciones, y en la actualidad tienen numerosas aplicaciones, todas ellas muy interesantes.

Gracias a su singularidad, este campo de estudio se ha hecho un hueco en la historia de las matemáticas (pues los más eminentes matemáticos como Diofanto, Pitágoras, Ramanujan, Fermat,… han dedicado su estudio a ellas desde tiempos inmemoriales) y en la historia de la humanidad, abriendo un camino de nuevas posibilidades y de nuevas realidades matemáticas.

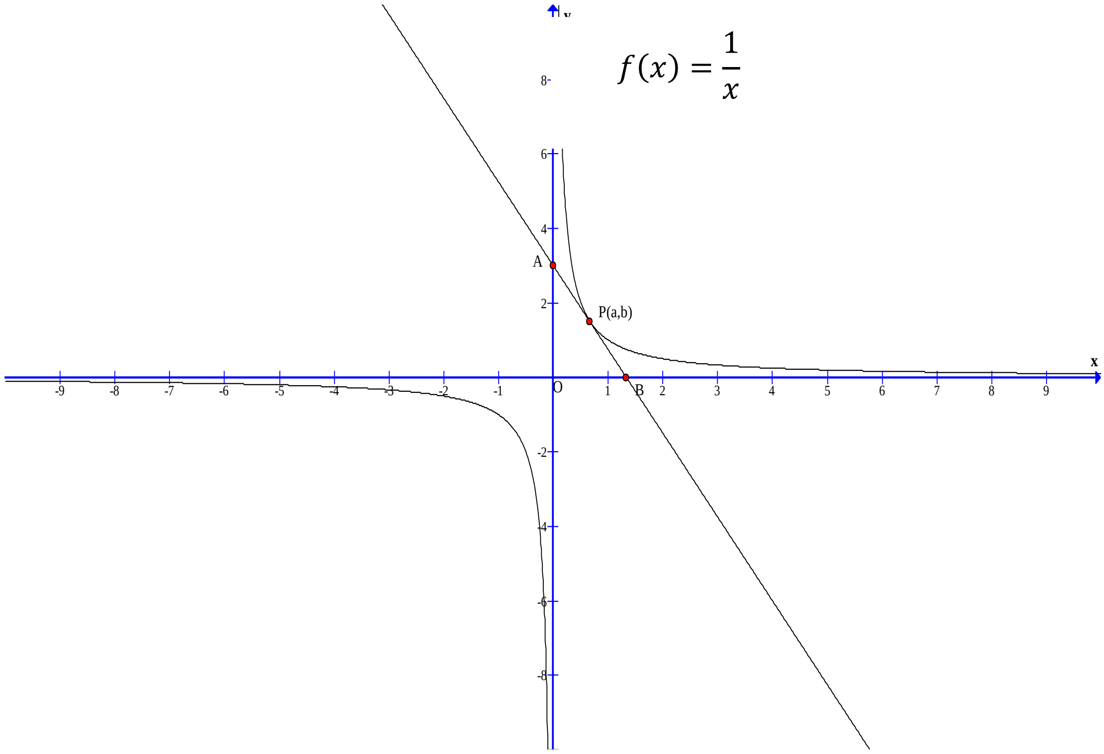
ANEXO 2

DOCUMENTO PH-BY

**PROPIEDADES DE LAS HIPÉRBOLAS
Y SUS ASÍNTOTAS**

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas propiedades que presentan las funciones racionales respecto a sus asíntotas. Para ello, vamos a estudiar la recta tangente a la hipérbola en uno cualquiera de sus puntos.

En primer lugar vamos a tomar la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$ y la recta tangente a ella en un punto cualquiera P(a,b), la cual interseca a los ejes de coordenadas, que son las asíntotas de dicha función, en los puntos A (con OY) y B (con OX):



Vamos a calcular la expresión de la recta tangente que pasa por el punto P, para ello primero se van a averiguar las coordenadas de P en función de a:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(a) = \frac{1}{a} = b$$

A continuación vamos a hallar la expresión de la recta tangente a la dada:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Si hallamos el valor de la función tangente para x=a, obtendremos la pendiente de la recta que es tangente a la función en el punto a:

$$f'(a) = \frac{-1}{a^2} = m$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto P es:

$$y-\frac{1}{a}=\frac{-1}{a^2}(x-a)$$

Desarrollando la expresión obtenemos:

$$y=\frac{-x}{a^2}+\frac{2}{a}$$

A continuación vamos a calcular los puntos de corte de la recta hallada con los ejes de coordenadas:

Con el eje OY (x=0):

$$y=\frac{-0}{a^2}+\frac{2}{a}$$

$$y=\frac{2}{a}$$

Luego el punto a es $A\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

Con el eje OX (y=0):

$$y=\frac{-x}{a^2}+\frac{2}{a}$$

$$0=\frac{-x+2a}{a^2}\rightarrow -x+2a=0\rightarrow x=2a$$

Luego el punto de corte con el eje OY es $B(2a,0)$

Podemos observar que el punto P es el punto medio del segmento AB:

$$M_{AB}\left(\frac{0+2a}{2},\frac{{}^{2}\!/_{a}+0}{2}\right)\rightarrow M_{AB}\left(a,\frac{1}{a}\right)=P(a,b)$$

También se observa que se forma un triángulo con los ejes de coordenadas, cuya área sería:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

Donde b es la base, que corresponde al segmento OB y h la altura, que corresponde al segmento OA:

$$b=OB=\sqrt{(2a-0)^2+(0-0)^2}=2a$$

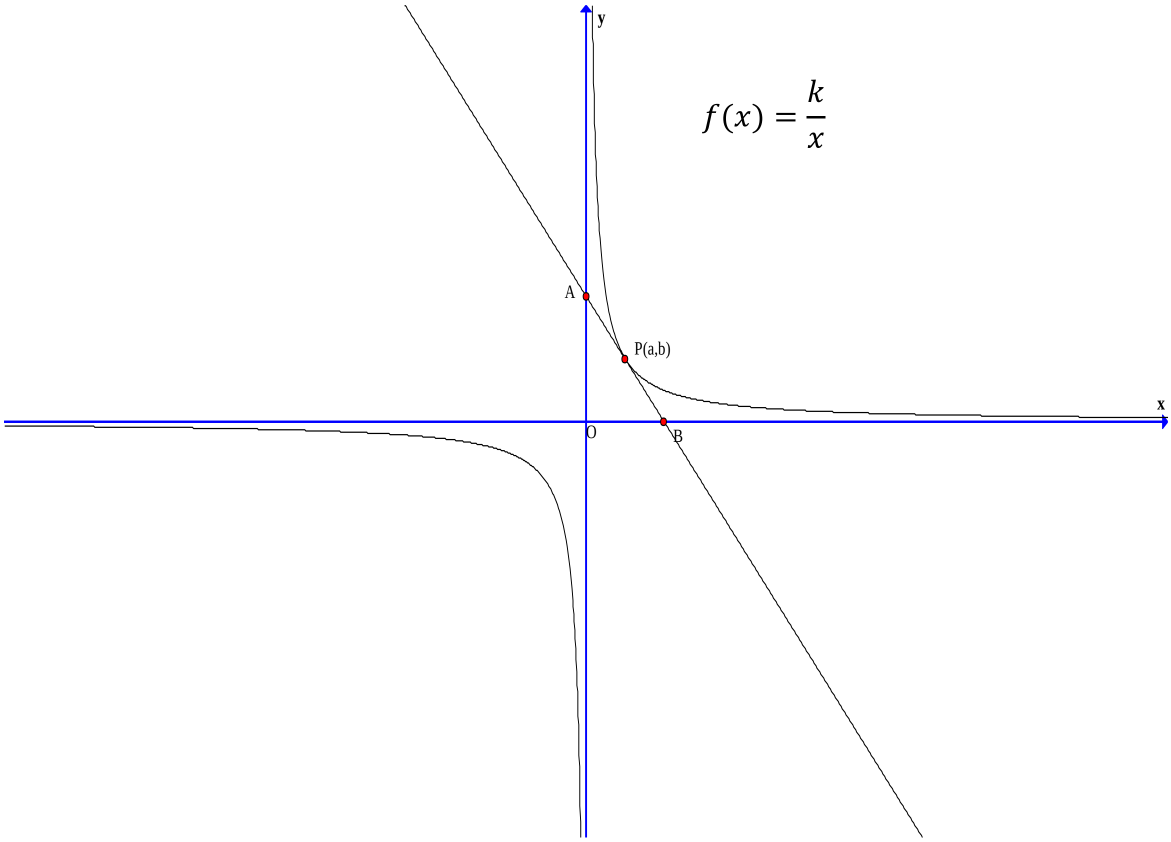
$$h=OA=\sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{2}{a}-0\right)^2}=\frac{2}{a}$$

Luego el área será:

$$A=\frac{2a\cdot\frac{2}{a}}{2}=2\,u.d.s$$

A continuación vamos a generalizar la función, para ver si se conservan estas propiedades.

Tomamos la función: $f(x) = \frac{k}{x}$ y vamos a realizar el mismo proceso.



Lo primero que vamos a hacer es calcular las coordenadas del punto P en función de a:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

$$f(a) = \frac{k}{a}$$

Calculamos la derivada de la función y seguidamente, la pendiente de la recta tangente a la función dada en el punto P:

$$f'(x) = \frac{-k}{x^2}$$

$$f'(a) = \frac{-k}{a^2} = m$$

La ecuación de la recta será por tanto:

$$y - \frac{k}{a} = \frac{-k}{a^2} \cdot (x - a)$$

$$y = \frac{-kx}{a^2} + \frac{2k}{a}$$

$$y = k \cdot \left(-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}\right)$$

Los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas son:

Con OY (x=0):

$$y = k \cdot \left(-\frac{0}{a^2} + \frac{2}{a}\right)$$

$$y = \frac{2k}{a}$$

El punto A es $A\left(0, \frac{2k}{a}\right)$

Con OX (y=0):

$$0 = k \cdot \left(-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}\right)$$

Como k no puede ser 0:

$$0 = -\frac{x + 2a}{a^2} \to -x + 2a = 0 \to x = 2a$$

Luego el punto B es $B(2a, 0)$

En esta ocasión también el punto P es el punto medio del segmento AB:

$$M_{AB}\left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{2k/_a + 0}{2}\right) \to M_{AB}\left(a, \frac{k}{a}\right) = P(a, b)$$

Si calculamos el área del triángulo que forma la recta tangente con los ejes de coordenadas obtenemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde b es la base, que corresponde al segmento OB y h la altura, que corresponde al segmento OA:

$$b = OB = \sqrt{(2a - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 2a$$

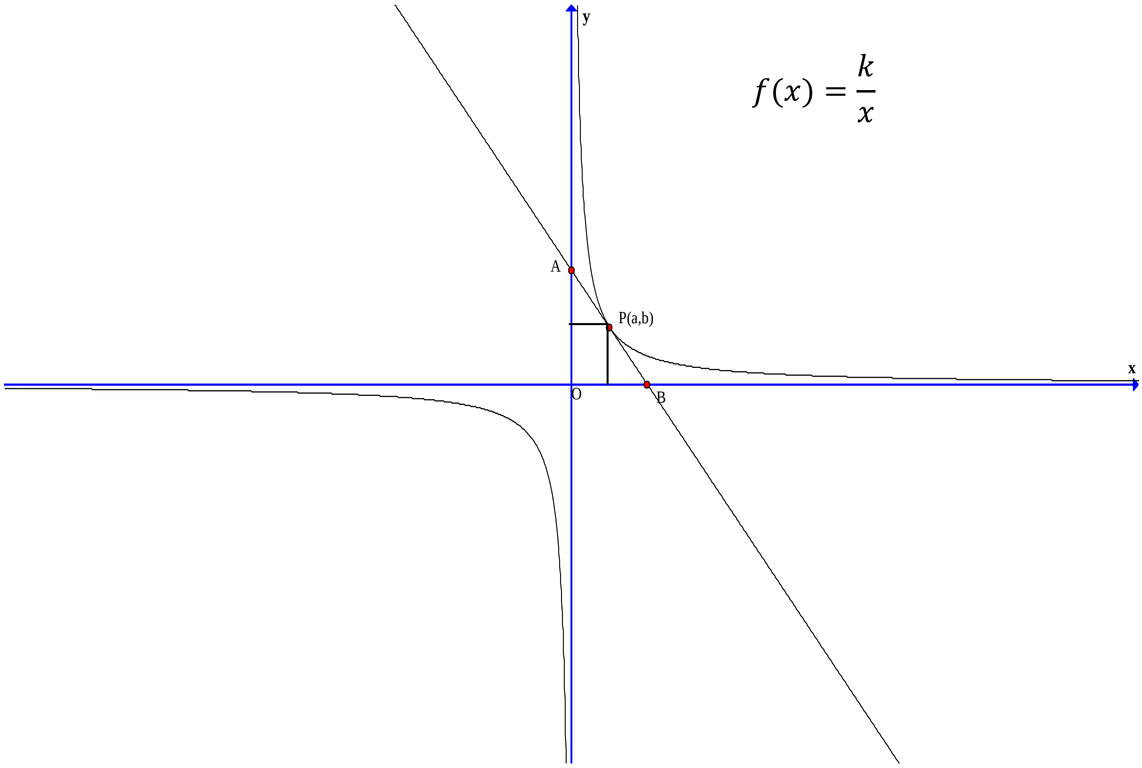
$$h = OA = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(\frac{2k}{a} - 0\right)^2} = \frac{2k}{a}$$

El área será:

$$A = \frac{2a \cdot 2k/_a}{2} = 2k$$

Podemos observar que el área del triángulo OAB es independiente del punto de tangencia.

El punto P es, a su vez, el vértice de un rectángulo cuya base y altura coinciden respectivamente con sus coordenadas. Es decir, de base a y de altura $\frac{k}{a}$.



Si calculamos su área obtenemos:

$$A = b \cdot h = a \cdot \frac{k}{a} = k$$

Es decir, el área del rectángulo con vértice en P es la mitad que el área del triángulo formado por la tangente a la hipérbola en el punto P y los ejes de coordenadas.

A raíz de esto caben plantearse algunas cuestiones como por ejemplo, qué coordenadas debería tener el punto P para que el triángulo OAB fuera isósceles. Es decir:

$$\frac{2k}{a} = 2a \rightarrow k = a^2$$

Luego:

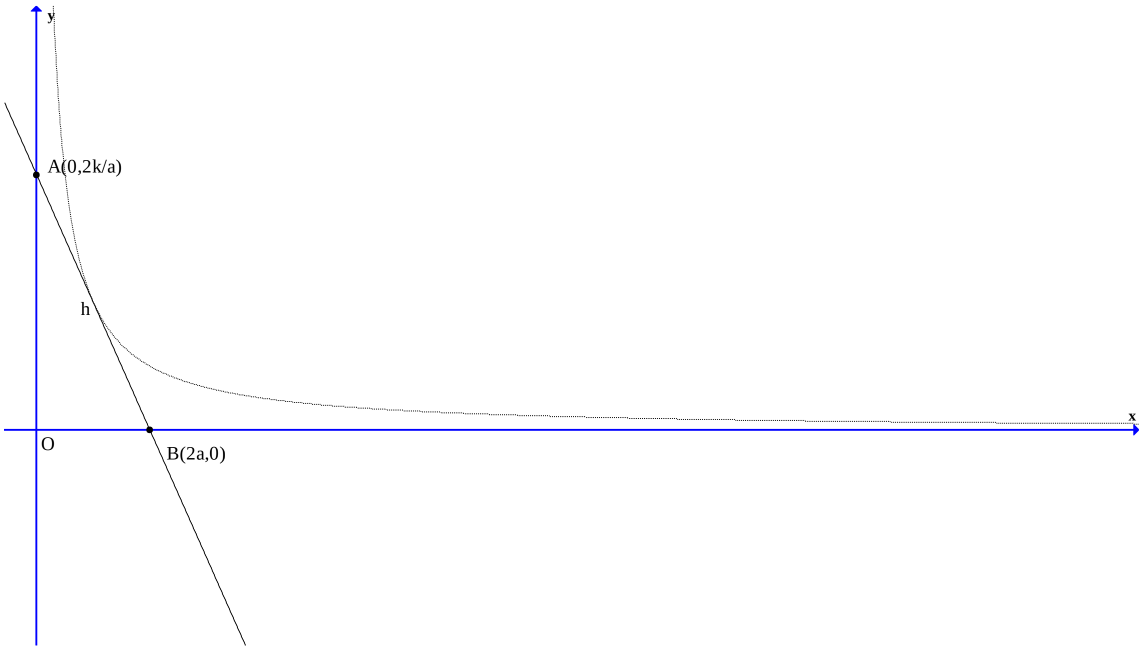
$$a = -\sqrt{k}$$

$$a = \sqrt{k}$$

Como a no puede ser un valor negativo, nos quedamos con la segunda solución. El punto buscado es:

$$P\left(\sqrt{k}, \frac{k}{\sqrt{k}}\right) \rightarrow P\left(\sqrt{k}, \sqrt{k}\,\right)$$

Otra cuestión que se puede plantear es qué coordenadas debería tener P para que la longitud de la hipotenusa del triángulo que se forma sea mínima.



La expresión de la hipotenusa (h) de dicho triángulo será, por el teorema de Pitágoras:

$$h(a) = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2k}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4k^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4a^4 + 4k^2}{a^2}}$$

Es decir:

$$h(a) = \frac{2\sqrt{a^4 + k^2}}{a}$$

Derivando esta función para poder calcular sus mínimos obtenemos:

$$h\acute{}(a) = \frac{2 \cdot \frac{4a^3}{2\sqrt{a^4 + k^2}} \cdot a - 2\sqrt{a^4 + k^2}}{a^2}$$

Simplificando esta expresión e igualándola a 0 obtenemos los posibles mínimos y máximos de la misma:

$$h\acute{}(a) = \frac{\frac{4a^4 - 2(a^4 + k^2)}{\sqrt{a^4 + k^2}}}{a^2} = \frac{4a^4 - 2a^4 - 2k^2}{a^2\sqrt{a^4 + k^2}} = \frac{2a^4 - 2k^2}{a^2\sqrt{a^4 + k^2}}$$

$$h\acute{}(a) = 0 \rightarrow \frac{2a^4 - 2k^2}{a^2\sqrt{a^4 + k^2}} = 0 \rightarrow 2a^4 - 2k^2 = 0$$

$$a^4 = k^2$$

$$a = \pm\sqrt{k}$$

Como $a \geq 0$, entonces obtenemos que $a = \sqrt{k}$ es un mínimo o un máximo de la función. Para saber si es un mínimo, que es lo que nos interesa para que la longitud de la hipotenusa sea la menor posible, analizamos el signo de h': podemos observar que para valores menores a $\sqrt{k}$ el signo es negativo, es decir, la función decrece. Para valores mayores a $\sqrt{k}$, el signo es positivo: la función crece. Por lo tanto, $a = \sqrt{k}$ es un mínimo de la función, y es el punto para el cual la longitud de la hipotenusa es mínima. El punto P será, por tanto:

$$P\left(\sqrt{k}, \frac{k}{\sqrt{k}}\right) \rightarrow P\left(\sqrt{k}, \sqrt{k}\right)$$

Es decir, cuando el triángulo es isósceles, la longitud de la hipotenusa es mínima.

Esta longitud es:

$$h(\sqrt{k}) = \frac{2\sqrt{\left(\sqrt{k}\right)^4 + k^2}}{\sqrt{k}} = \frac{2k\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{2k}$$

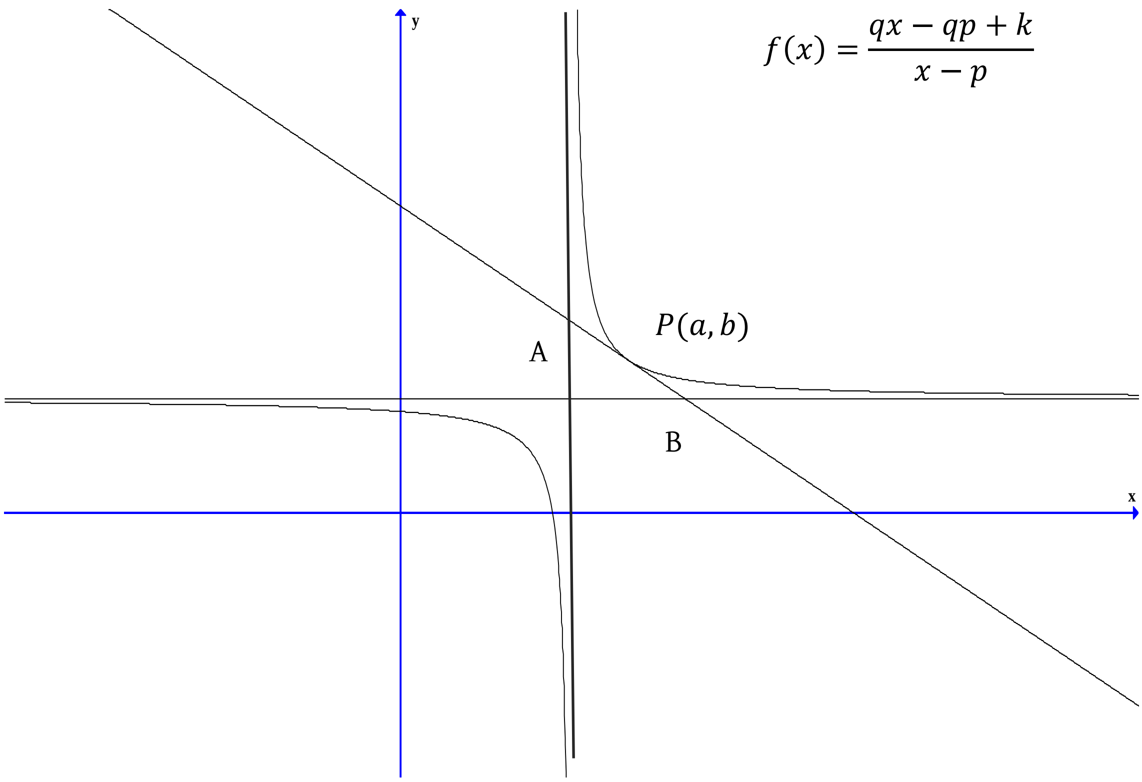
A continuación vamos a comprobar si se siguen conservando estas mismas propiedades al trasladar la hipérbola. Si la trasladamos de tal forma que el origen de coordenadas sea un punto O'(p,q), la nueva expresión de la hipérbola será la siguiente:

$$f(x) = \frac{k}{x-p} + q$$

Ya que trasladamos la gráfica p unidades a la derecha, lo que implica restar p a x, y q unidades hacia arriba, sumamos q a la función. Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$f(x) = \frac{k + q(x-p)}{x-p}$$

$$f(x) = \frac{qx - qp + k}{x-p}$$



Las ecuaciones de las asíntotas de esta hipérbola son:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{qx - pq + k}{x - p} = q$$

$$\lim_{x \to p} \frac{qx - pq + k}{x - p} = \infty$$

Es decir, $y = q$ es su asíntota horizontal y $x = p$ es su asíntota vertical.

A continuación vamos a comprobar si se cumplen las mismas propiedades que se cumplían en la hipérbola centrada en el origen. En primer lugar vamos a tomar un punto cualquiera P de la función y a calcular la recta tangente a la función en ese punto:

Si llamamos a las coordenadas de P a y b, es decir, P(a,b), obtenemos que el valor de b es:

$$f(a) = \frac{qa - pq + k}{a - p}$$

Por lo tanto, $P\left(a, \frac{qa-pq+k}{a-p}\right)$

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{q(x-p) - (qx - pq + k)}{(x-p)^2}$$

$$f'(x) = \frac{qx - pq - qx + pq - k}{(x-p)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-k}{(x-p)^2}$$

La recta tangente a la hipérbola en P será:

$$f'(a) = \frac{-k}{(a-p)^2} = m$$

$$y - \frac{qa - pq + k}{a - p} = \frac{-k}{(a-p)^2}(x-a)$$

$$y = \frac{-kx}{(a-p)^2} + \frac{ka}{(a-p)^2} + \frac{qa - pq + k}{a - p}$$

$$y = \frac{-kx + ka + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

Si ahora calculamos los puntos de corte de la recta tangente con las asíntotas obtenemos:

Con $y = q$:

$$y = \frac{-kx + ka + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

$$q = \frac{-kx + ka + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

$$q \cdot (a-p)^2 = -kx + ka + (qa - pq + k)(a-p)$$

$$kx = ka + (qa - pq + k)(a-p) - q \cdot (a-p)^2$$

Sacando factor común (a-p) y simplificando:

$$x = \frac{ka + (a-p)[qa - pq + k - q(a-p)]}{k}$$

$$x = \frac{ka + (a-p)(qa - pq + k - qa + pq)}{k}$$

$$x = \frac{ka + (a-p)k}{k} = a + a - p = 2a - p$$

Luego $B(2a - p, q)$

Con $x = p$:

$$y = \frac{-kx + ka + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

$$y = \frac{-kp + ka + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

$$y = \frac{k(a-p) + (qa - pq + k)(a-p)}{(a-p)^2}$$

$$y = \frac{k + qa - pq + k}{a-p} = \frac{qa - pq + 2k}{a-p}$$

Luego $A\left(p, \frac{qa-pq+2k}{a-p}\right)$

Calculamos el punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$M_{AB}\left(\frac{p+2a-p}{2}, \frac{\frac{qa-pq+2k}{a-p} + q}{2}\right)$$

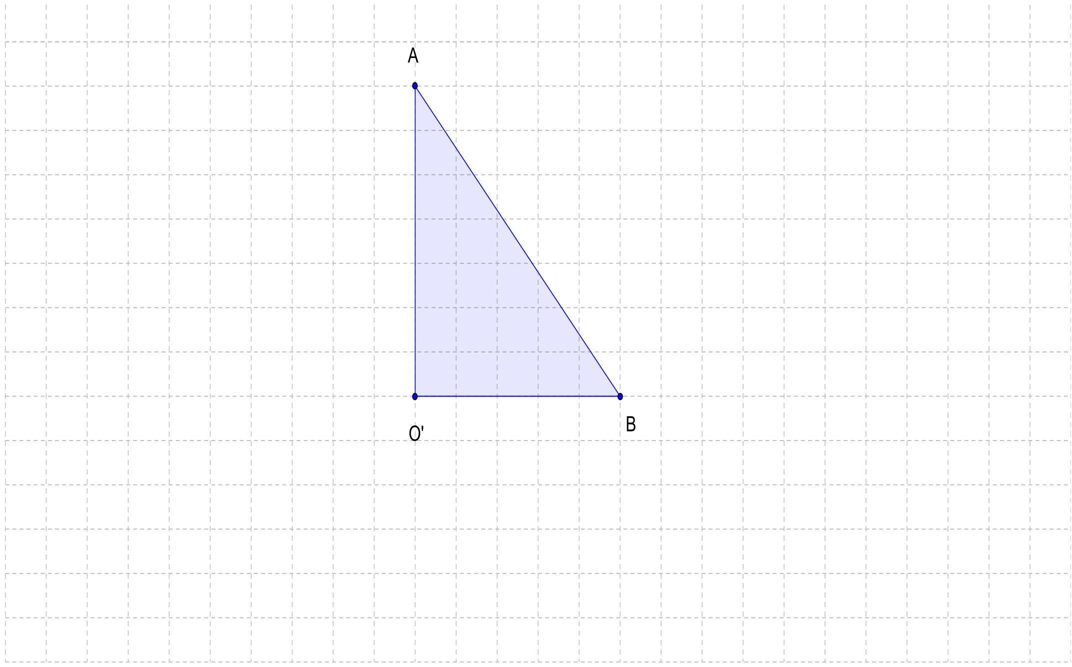
$$M_{AB}\left(a, \frac{q(a-p) + 2k + q(a-p)}{2(a-p)}\right)$$

$$M_{AB}\left(a, \frac{2q(a-p) + 2k}{2(a-p)}\right)$$

$$M_{AB}\left(a, \frac{qa - qp + k}{(a-p)}\right) = P$$

Es decir, el punto P es el punto medio del segmento formado por la intersección de la recta tangente a la función en P con sus asíntotas, tal como esperábamos

Tomamos el triángulo que se forma entre la tangente a la función y sus asíntotas:



Vamos a calcular su área:

Sabemos las coordenadas de los tres vértices:

$$A\left(p, \frac{qa-pq+2k}{a-p}\right)$$

$$B(2a-p,q)$$

$$O'(p,q)$$

El área del triángulo será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde:

$$b = \overline{O'B} = 2a-p-p = 2a-2p$$

$$h = \overline{O'A} = \frac{qa-qp+2k}{a-p} - q = \frac{q(a-p)+2k-q(a-p)}{a-p} = \frac{2k}{a-p}$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{(2a-2p)\cdot \frac{2k}{a-p}}{2}$$

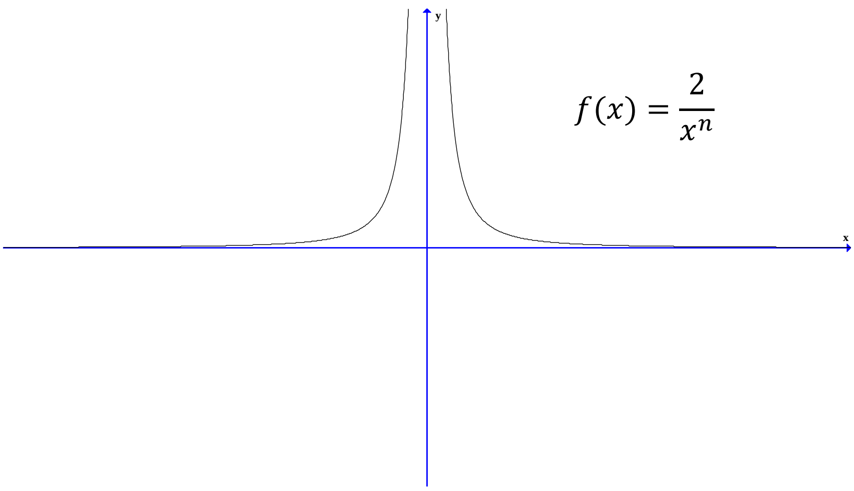
$$A = \frac{2(a-p)\cdot 2k}{2(a-p)}$$

$$A = 2k$$

Observamos que el área del triángulo sigue teniendo el mismo valor a pesar de haber trasladado la hipérbola.

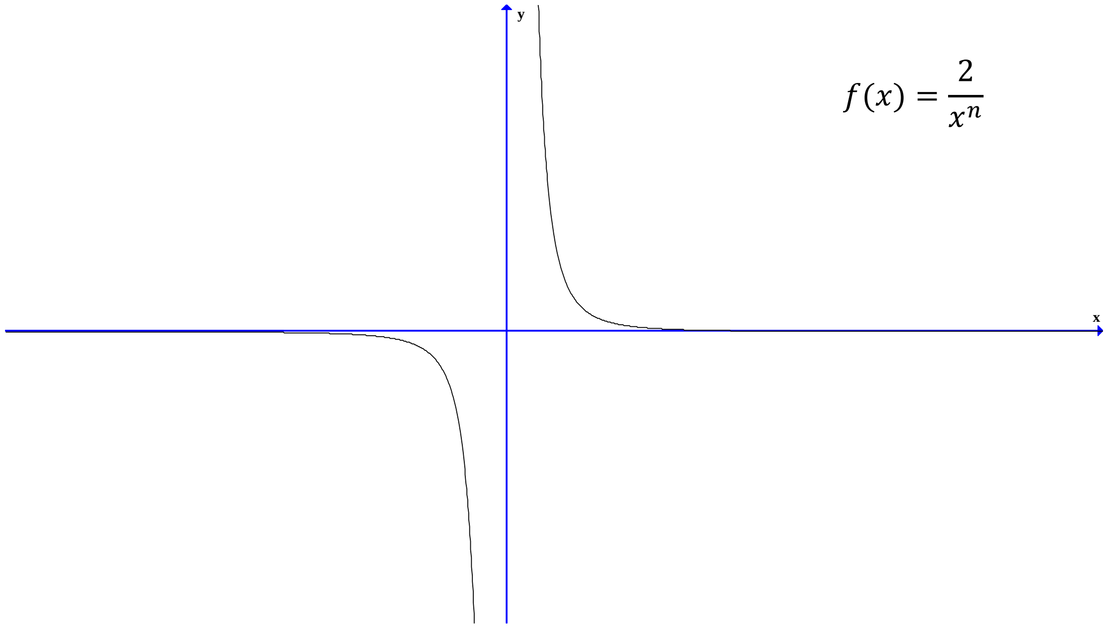
Vamos ahora a tomar la función $f(x) = \frac{k}{x^n}$, una generalización del caso anterior, en la que n es un número entero positivo, y vamos a estudiar si se cumplen las propiedades anteriores

Si tomamos un valor n par, para k=2, la función tiene la siguiente forma:

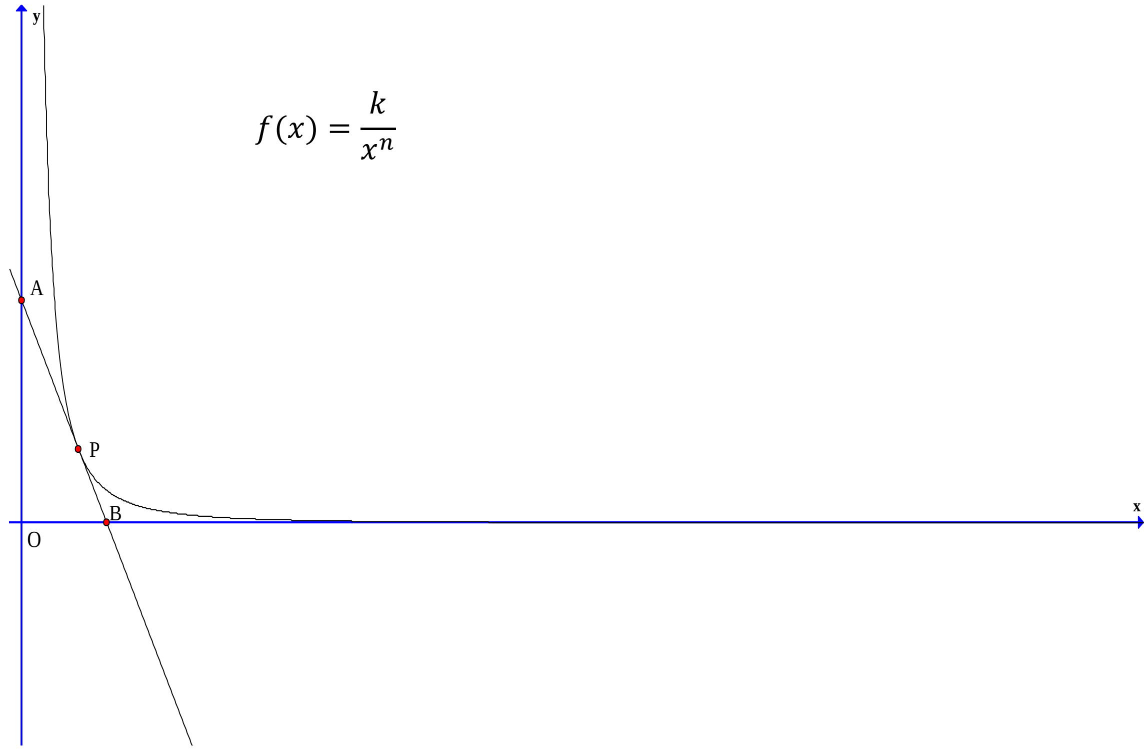


Es decir, la función no toma en ningún momento valores negativos.

Sin embargo, si el exponente es impar, la forma de la función cambia:



Si tomamos el primer cuadrante del eje, en el que ambas funciones coinciden, podemos estudiar esas propiedades:



En primer lugar, como en el resto de los casos, vamos a calcular las coordenadas del punto P y la ecuación de la recta tangente a la hipérbola por ese punto.

Sabiendo que $f(x) = \frac{k}{x^n}$, tenemos que:

$$P(a, b) \rightarrow P\left(a, \frac{k}{a^n}\right)$$

Derivando y sustituyendo por P hallamos la recta tangente que pasa por ese punto:

$$f'(x) = \frac{-k \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-kn}{x^{n+1}}$$

$$f'(a) = \frac{-k \cdot n \cdot a^{n-1}}{a^{2n}} = \frac{-kn}{a^{n+1}} m$$

La recta tangente será:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{k \cdot n \cdot a^{n-1}}{a^{2n}}(x-1)$$

$$y = -\frac{k \cdot n \cdot a^{n-1} \cdot x}{a^{2n}} + \frac{k \cdot n \cdot a^n}{a^{2n}} + \frac{k}{a^n}$$

$$y = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{2n-n+1}} + \frac{k \cdot n}{a^{2n-n}} + \frac{k}{a^n}$$

$$y = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{n+1}} + \frac{k \cdot n}{a^n} + \frac{k}{a^n} = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{n+1}} + \frac{k \cdot n + k}{a^n}$$

$$y = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{n+1}} + \frac{k(n+1)}{a^n}$$

Calculamos los puntos de corte con sus asíntotas, en este caso los ejes de coordenadas:

Con el eje OX (y=0):

$$0 = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{n+1}} + \frac{k(n+1)}{a^n} = -\frac{k \cdot n \cdot x}{a^{n+1}} + \frac{ka(n+1)}{a^{n+1}}$$

$$0 = \frac{-knx + ka(n+1)}{a^{n+1}} \rightarrow -knx + ka(n+1) = 0$$

$$knx = ka(n+1) \rightarrow x = \frac{a(n+1)}{n}$$

Es decir, $B\left(\frac{a(n+1)}{n}, 0\right)$

Con el eje OY (x=0):

$$y = \frac{k(n+1)}{a^n}$$

Luego $A\left(0, \frac{k(n+1)}{a^n}\right)$

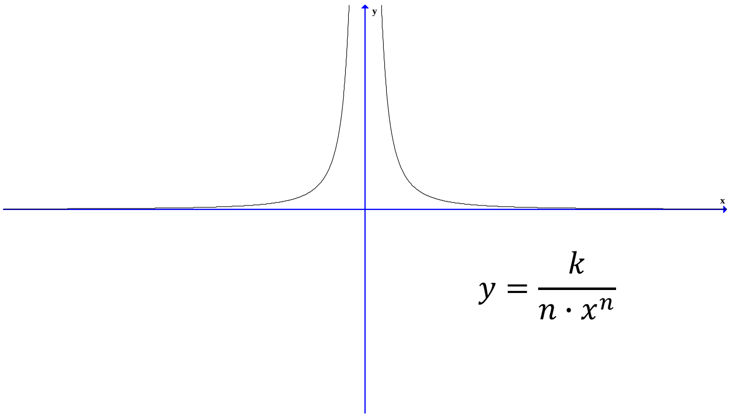
Calculando el punto medio del segmento AB obtenemos:

$$M_{AB}\left(\frac{\frac{a(n+1)}{n} + 0}{2}, \frac{0 + \frac{k(n+1)}{a^n}}{2}\right)$$

$$M_{AB}\left(\frac{a(n+1)}{2n}, \frac{k(n+1)}{2a^n}\right)$$

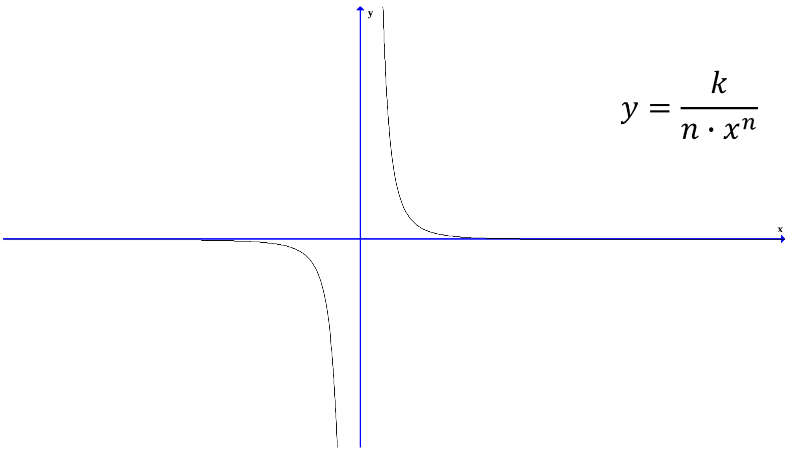
Podemos observar que en este caso, el punto P no es el punto medio de los puntos de corte de la recta tangente a la hipérbola que pasa por P con las asíntotas (en este caso los ejes de coordenadas) como ocurría en las situaciones anteriores.

Si ahora generalizamos el caso anterior y tomamos la función $y = \frac{k}{n \cdot x^n}$, siendo $n \geq 2$, donde P es un punto cualquiera de la misma:

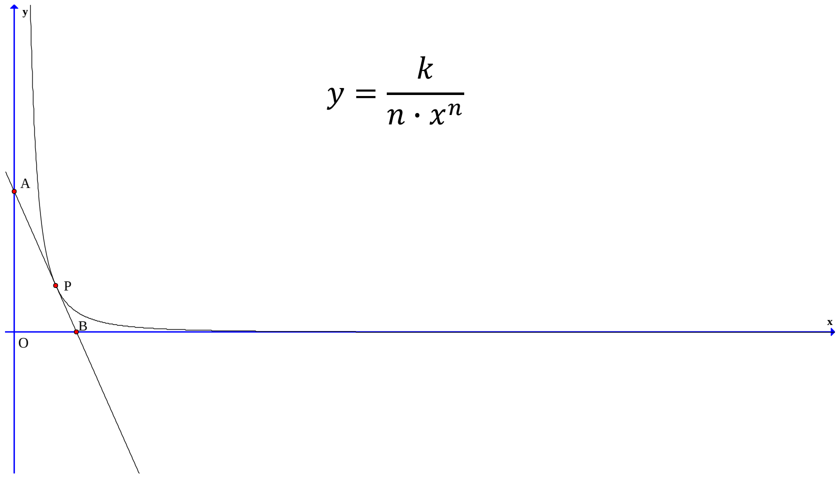


En este caso ocurre como en el anterior, si n es un número par, la gráfica será de la siguiente forma:

En cambio, si n es un número impar, la gráfica será:



Tomamos el primer cuadrante, que coincide en ambos casos, para estudiar las propiedades de esta función:



Tomamos el punto P(a,b), y calculamos la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto.

Sabemos que $f(x) = \frac{k}{n \cdot x^n}$, luego:

$$f(a) = \frac{k}{n \cdot a^n} \to P\left(a, \frac{k}{n \cdot a^n}\right)$$

Derivamos para calcular la recta tangente:

$$f'(x) = \frac{-k \cdot n \cdot n \cdot x^{n-1}}{(n \cdot x^n)^2} = \frac{-k \cdot n^2 \cdot x^{n-1}}{n^2 \cdot x^{2n}} = \frac{-k \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-k}{x^{n+1}}$$

$$f'(a) = \frac{-k}{a^{n+1}} = m$$

Por lo tanto, la recta tangente será:

$$y - \frac{k}{n \cdot a^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}(x - a)$$

Operando obtenemos:

$$y - \frac{k}{n \cdot a^n} = \frac{-kx}{a^{n+1}} + \frac{ka}{a^{n+1}}$$

$$y = \frac{-kx + ka}{a^{n+1}} + \frac{k}{n \cdot a^n}$$

$$y = k\left(\frac{-x + a}{a^{n+1}} + \frac{1}{n \cdot a^n}\right)$$

$$y = k\left(\frac{n(-x + a)}{n \cdot a^{n+1}} + \frac{a}{n \cdot a^{n+1}}\right)$$

Calculamos los puntos de corte de la recta tangente con los ejes de coordenadas, que son sus asíntotas:

Con el eje OX (y=0):

$$0 = k\left(\frac{n(-x + a)}{n \cdot a^{n+1}} + \frac{a}{n \cdot a^{n+1}}\right)$$

$$0 = k\left(\frac{-nx + na + a}{n \cdot a^{n+1}}\right)$$

Como k no puede ser 0 y $n \geq 2$, entonces:

$$0 = -nx + na + a$$

$$x = \frac{(n+1)a}{n}$$

Luego $B\left(\frac{(n+1)a}{n}, 0\right)$

Con el eje OY (x=0):

$$y = k\left(\frac{na}{n \cdot a^{n+1}} + \frac{a}{n \cdot a^{n+1}}\right)$$

$$y = k\left(\frac{(n+1)a}{n \cdot a^{n+1}}\right)$$

$$y = \frac{k(n+1)}{n \cdot a^{n}}$$

Luego $A\left(0, \frac{k(n+1)}{n \cdot a^{n}}\right)$

Si calculamos el punto medio del segmento AB obtenemos:

$$M_{AB}\left(\frac{(n+1)a}{2n}, \frac{k(n+1)}{2n \cdot a^{n}}\right)$$

Para que el punto $P\left(a, \frac{k}{n \cdot a^{n}}\right)$ fuera el punto medio del segmento

$$a = \frac{(n+1)a}{2n}$$

$$1 = \frac{n+1}{2n} \to n = 1$$

Sin embargo, $n \geq 2$, luego en este caso P no es el punto medio del segmento formado por la recta tangente a la función en P y los puntos de corte de dicha recta con sus asíntotas.

También podemos ver que se forma un triángulo OAB cuyos lados son la recta tangente y las asíntotas de la función, en este caso los ejes de coordenadas. Si calculamos el área de dicho triangulo obtenemos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde b es $\overline{OB}$ y donde h es $\overline{OA}$, por lo tanto:

$$A = \frac{\frac{(n+1)a}{n} \cdot \frac{k(n+1)}{n \cdot a^{n}}}{2}$$

$$A = \frac{ak(n+1)^2}{2n^2 \cdot a^{n}}$$

$$A = \frac{k(n+1)^2}{2n^2 \cdot a^{n-1}}$$

A partir de este resultado, cabe plantarse otras preguntas, por ejemplo: ¿Qué coordenadas debe tener el punto P para que el triángulo OAB sea isósceles?

Para que el triángulo sea isósceles debe cumplirse lo siguiente:

$$h = b$$

Como

$$h = \frac{k(n+1)}{n \cdot a^n} \quad \text{y} \quad b = \frac{(n+1)a}{n}$$

$$\frac{k(n+1)}{n \cdot a^n} = \frac{(n+1)a}{n}$$

$$a = \frac{k}{a^n} \rightarrow k = a^{n+1}$$

$$a = \sqrt[n+1]{k}$$

Sabiendo a, deducimos que b es:

$$b = \frac{k(n+1)}{n \cdot a^n} \rightarrow b = \frac{k(n+1)}{n \cdot \left(\sqrt[n+1]{k}\right)^n}$$

Desarrollando esta expresión

$$b = \frac{k(n+1)}{n \cdot k^{\frac{n}{n+1}}}$$

$$b = \frac{1}{n} \cdot k^{1-\frac{n}{n+1}} \cdot (n+1)$$

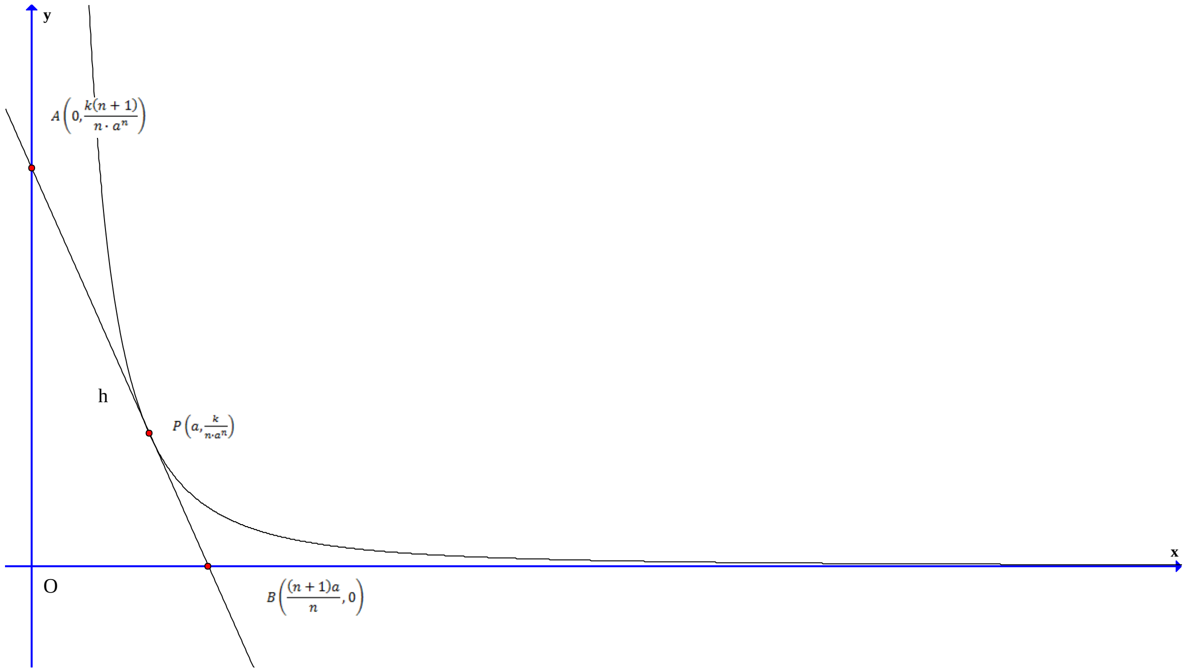
$$b = \frac{(n+1)}{n} \cdot k^{\frac{n+1-n}{n+1}}$$

$$b = \frac{(n+1)}{n} \cdot k^{\frac{1}{n+1}}$$

$$b = \frac{(n+1)}{n} \sqrt[n+1]{k}$$

Luego P$\left(\sqrt[n+1]{k} \;,\; \frac{(n+1)}{n} \sqrt[n+1]{k}\right)$

Otra pregunta que se puede plantear es qué coordenadas debe tener P para que la hipotenusa AB del triángulo OAB tenga longitud mínima:



Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa (h) del triángulo será:

$$h(a)=\sqrt{\left(\frac{(n+1)a}{n}\right)^2+\left(\frac{k(n+1)}{n\cdot a^n}\right)^2}$$

$$h(a)=\sqrt{\frac{(n+1)^2a^2}{n^2}+\frac{k^2(n+1)^2}{n^2\cdot a^{2n}}}$$

Sacando factor común:

$$h(a)=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\left(a^2+\frac{k^2}{a^{2n}}\right)}$$

$$h(a)=\frac{(n+1)}{n}\sqrt{a^2+\frac{k^2}{a^{2n}}}$$

$$h(a)=\frac{(n+1)}{n}\sqrt{\frac{a^{2n+2}+k^2}{a^{2n}}}$$

$$h(a)=\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}{a^n}$$

Para obtener el mínimo de esta función, lo que nos permitirá averiguar las coordenadas de P para que la longitud de la hipotenusa sea mínima, es necesario derivar la función hipotenusa:

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{2(n+1)\cdot a^{2(n+1)-1}}{2\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}\cdot a^n-\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}\cdot n\cdot a^{n-1}}{a^{2n}}$$

Para obtener los máximos y mínimos de esta función, simplificamos e igualamos a 0:

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{(n+1)\cdot a^{3n+1}}{\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}-\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}\cdot n\cdot a^{n-1}}{a^{2n}}$$

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n+1)\cdot a^{3n+1}-\left(a^{2(n+1)}+k^2\right)\cdot na^{n-1}}{a^{2n}\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}$$

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n+1)\cdot a^{3n+1}-na^{3n+1}-k^2\cdot na^{n-1}}{a^{2n}\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}$$

Sacando factor común a^{n-1}:

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a^{n-1}[(n+1)\cdot a^{2n+2}-na^{2n+2}-k^2n]}{a^{2n}\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n+1-n)\cdot a^{2n+2}-k^2n}{a^{n+1}\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}$$

$$h'(a)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a^{2n+2}-k^2n}{a^{n+1}\sqrt{a^{2(n+1)}+k^2}}$$

Igualamos a 0:

$$h'(a)=0; n\geq 2\rightarrow a^{2n+2}-k^2n=0$$

Es decir:

$$a=\pm\sqrt[2n+2]{k^2n}$$

Para obtener la segunda coordenada *b* de P, tomamos el valor positivo de *a*, es decir, vamos a trabajar en el primer cuadrante.

Dado que $f(x)=\frac{k}{n\cdot x^n}$, entonces:

$$f(a)=\frac{k}{n\cdot a^n}$$

Sustituimos *a* por el valor hallado anteriormente.

$$f(a)=\frac{k}{n\cdot\left(\sqrt[2n+2]{k^2n}\right)^n}$$

Operando

$$f(a)=\frac{k}{n\cdot\left((k^2n)^{\frac{1}{2n+2}}\right)^n}$$

$$f(a)=\frac{k}{n\cdot(k^2n)^{\frac{n}{2n+2}}}$$

$$f(a)=\frac{1}{n\cdot n^{\frac{n}{2n+2}}}\cdot k^{1-\frac{2n}{2n+2}}$$

$$f(a)=\frac{1}{n^{\frac{2n+2+n}{2n+2}}}\cdot k^{\frac{2n+2-2n}{2n+2}}=\frac{1}{n^{\frac{3n+2}{2n+2}}}\cdot k^{\frac{2}{2n+2}}$$

Es decir:

$$f(a)=\frac{k^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{3n+2}{2n+2}}}$$

$$b=\frac{\sqrt[n+1]{k}}{\sqrt[2n+2]{n^{3n+2}}}$$

El punto buscado P es $P\left(\sqrt[2n+2]{k^2n}\ ,\ \frac{\sqrt[n+1]{k}}{\sqrt[2n+2]{n^{3n+2}}}\right)$.

Hemos observado que las propiedades de las hipérbolas varían según su ecuación, aunque conservan algunas propiedades independientemente de su expresión matemática.

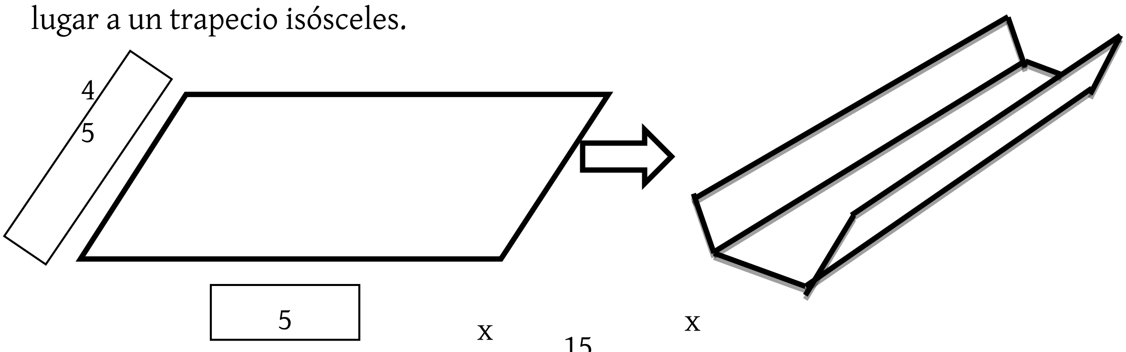
ANEXO 3.

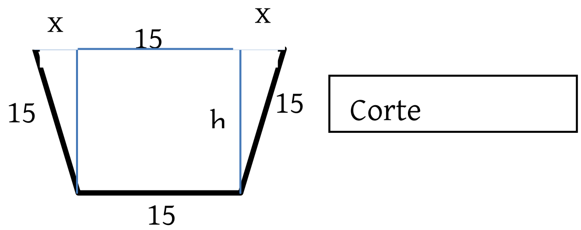
DOCUMENTO MC-JS

DISEÑO DE UNA CANALETA PARA EL AGUA

En el siguiente informe vamos a investigar las distintas variables que definen una canaleta para recoger agua cuya sección transversal es un trapecio para concluir con la forma óptima de la canaleta.

El modelo de canaleta que vamos a estudiar se construye utilizando una plancha rectangular con 5 metros de largo y 45 centímetros de ancho. El ancho se dobla en tres partes iguales para dar lugar a un trapecio isósceles.

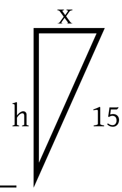




En primer lugar vamos a estudiar el volumen de agua que cabe en la canaleta en función de **x y en cm³**. El volumen de agua se calcula hallando el área de la base y multiplicándolo por la altura.

$$Volumen = \acute{A}rea\ de\ la\ base \cdot Altura; Altura = 500\ cm\ ; \acute{A}rea\ de\ la\ base = \frac{h(B1+B2)}{2}\ cm^2$$

$$B1 = \frac{45}{3} = 15\ cm\ ; B2 = \frac{45}{3} + 2x = 15 + 2x\ cm\ ; h = \sqrt{\left(\frac{45}{3}\right)^2 - x^2} = \sqrt{15^2 - x^2}$$



$$Volumen = 500\frac{\sqrt{15^2 + x^2}(15 + 15 + 2x)}{2} = 500\sqrt{225 - x^2}\frac{2(15 + x)}{2} = 500(15 + x)\sqrt{225 - x^2}$$

Tras haber hallado la función que define el volumen en función de x, obtendremos el valor de x para el cual el volumen es máximo. Para ello hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero para obtener así los puntos singulares.

$$f(x) = 500(15 + x)\sqrt{225 - x^2} = (7500 + 500x)\sqrt{225 - x^2}$$

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x); f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)}g(x)$$

$$f'(x) = 500\sqrt{225 - x^2} + (500x + 7500)\frac{-2x}{2\sqrt{225 - x^2}}$$

$$f'(x) = 500\left(\sqrt{225 - x^2} - \frac{x^2 + 15x}{\sqrt{225 - x^2}}\right); f'(x) = 0$$

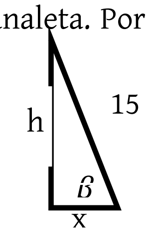
$$f'(x) = 225 - x^2 - x^2 - 15x = 0\ ; \ -2x^2 - 15x + 225 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 1800}}{-4}\ ; \ \frac{15 + \sqrt{15^2 + 1800}}{-4} = -15\ cm$$

Esta solución no tiene sentido físico, ya que no puede ser negativa una longitud.

$$x = \frac{15 - \sqrt{15^2 + 1800}}{-4} = 7{,}5\ cm$$

El valor de x para que el volumen de agua que cabe en la canaleta sea máximo es de 7,5 cm. Otra variable que define el volumen de agua es el ángulo de giro de los laterales de la canaleta. Por ello vamos a estudiar la función que defina el volumen **según el ángulo ($\boldsymbol{\beta}$).**



$$Altura = 500\ cm\ ; Área\ de\ la\ base = \frac{h(B1+B2)}{2}\ cm^2$$

$$B1 = 15\ ; B2 = 15 + 2x\ ; x = \cos(\beta)\,15\ ; h = \sin(\beta)\,15$$

$$Volumen = 500[15\sin(\beta)]\left[\frac{15 + 15 + 30\cos(\beta)}{2}\right]$$

$$Volumen = 500 \cdot 15 \cdot \sin(\beta) \cdot \left[\frac{30 + 30\cos(\beta)}{2}\right] = 7500\sin(\beta)\,[15 + 15\cos(\beta)]$$

$$Volumen = 7500\sin(\beta)\,15[1 + \cos(\beta)] = 112500[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta)$$

Tras haber hallado la fórmula que define el volumen de agua en la canaleta, vamos a buscar el valor de β para el cual el volumen de agua es máximo.

$$g(\beta) = 112500[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta) = [112500 + 112500\cos(\beta)]\sin(\beta)$$

$$g'(\beta) = [-112500\sin(\beta)]\sin(\beta) + \cos(\beta)\,[112500 + 112500\cos(\beta)];\ g'(\beta) = 0$$

$$-112500\sin^2(\beta) + 112500\cos(\beta) + 112500\cos^2(\beta) = 0$$

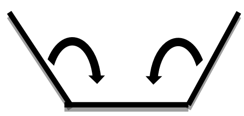
$$-112500 + 112500\cos^2(\beta) + 112500\cos(\beta) + 112500\cos^2(\beta) = 0$$

$$225000\cos^2(\beta) + 112500\cos(\beta) - 112500 = 0\ ; \cos(\beta) = A$$

$$225000\,A^2 + 112500\ \mathrm{A} - 112500 = 0$$

$$A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-112500 \pm \sqrt{112500^2 + 4(112500^2 \cdot 2)}}{450000}$$

$$\frac{-112500 - \sqrt{112500^2 + 4(112500^2 \cdot 2)}}{450000} = -1$$



Esta solución no tiene sentido porque $\arccos(-1) = \pi\ rad$ con lo que no existiría la canaleta.

$$\frac{-112500 + \sqrt{112500^2 + 4(112500^2 \cdot 2)}}{450000} = 0{,}5\ ; \arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

El valor de β para que el volumen de agua que quepa en la canaleta sea máximo es de $\frac{\pi}{3}$ radianes o 60°.

Para comprobar que hasta ahora los valores obtenidos para que el volumen de agua en la canaleta sea máximo son correctos vamos a utilizar la relación entre x y β. Como hemos visto en el apartado anterior, $\cos(\beta) = \frac{x}{15}$, por lo tanto, si el valor de x es 7,5:

$$\cos(\beta) = \frac{7{,}5}{15} = 0{,}5\,; \arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}\; rad$$

Como podemos ver, los valores que hemos obtenido anteriormente verifican la relación, con lo que podemos afirmar que estos valores son válidos. Para comprobar la equivalencia entre las funciones, vamos a tratar de obtener la función $g(\beta)$ desde la función $f(x)$.

$$f(x) = 500(15 + x)\sqrt{225 - x^2}; g(\beta) = 112500[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta)$$

$$x = 15\cos(\beta)\ ; 500(15 + x)\sqrt{225 - x^2} = 500[15 + 15\cos(\beta)]\sqrt{225 - 15^2\cos^2(\beta)}$$

$$500[15 + 15\cos(\beta)]\sqrt{225 - 15^2\cos^2(\beta)} = 500 \cdot 15[1 + \cos(\beta)]\sqrt{225[1 - \cos^2(\beta)]}$$

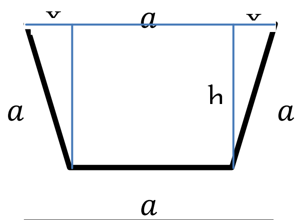
$$500 \cdot 15[1 + \cos(\beta)]\sqrt{225[1 - \cos^2(\beta)]} = 7500[1 + \cos(\beta)]15\sqrt{\sin^2(\beta)}$$

$$7500[1 + \cos(\beta)]15\sqrt{\sin^2(\beta)} = 112500[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta)$$

Como hemos podido comprobar, se verifica que, considerando la relación entre β y x, podemos llegar a $g(\beta)$ desde $f(x)$.

Hasta este punto, hemos resuelto las cuestiones tomando como valor de anchura 45 centímetros, pero ahora vamos a plantearnos estas mismas cuestiones con un valor supuesto de anchura igual a $3a$, siendo a un número real positivo, para generalizar el modelo.

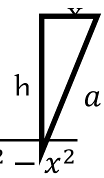
En primer lugar, vamos a estudiar, en función de x, el volumen de agua que cabe dentro de la canaleta tomando como valores los que aparecen en la representación del corte transversal de la canaleta que se encuentra en el margen.



Corte

$$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura$$

$$Altura = 500\ cm\,; Área\ de\ la\ base = \frac{h(B1+B2)}{2}$$



$$B1 = a\,; B2 = a + 2x\,; h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$Volumen = 500\frac{1}{2}(a + a + 2x)\sqrt{a^2 - x^2} = 500(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Tras haber hallado la función que define el volumen en función de x, vamos a pasar a hallar el valor de x para el cual el volumen es máximo.

$$f(x) = 500(a + x)\sqrt{a^2 - x^2} = (500a + 500x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x); f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

$$f'(x) = 500\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(500a + 500x); f'(x) = 0$$

$$500\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}(a + x)\right] = 0\,; \frac{a^2 - x^2 - ax - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{0}{500}$$

$$a^2 - ax - 2x^2 = 0\sqrt{a^2 - x^2}; -2x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{A}} = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4}$$

$$x = \frac{a + \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4} = \frac{a + \sqrt{9a^2}}{-4} = \frac{a + 3a}{-4} = \frac{4a}{-4} = -a$$

Esta solución no tiene sentido físico, ya que no puede ser negativa una longitud.

$$x = \frac{a - \sqrt{(-a)^2 + 8a^2}}{-4} = \frac{a - \sqrt{9a^2}}{-4} = \frac{a - 3a}{-4} = \frac{-2a}{-4} = \frac{a}{2}$$

Con este resultado podemos determinar que la longitud de x para que el volumen de agua que cabe en la canaleta sea máximo tiene que valer $\frac{a}{2}\ cm$ siendo $3a$ la medida de la anchura de la plancha con la que se fabrica la canaleta.

Por otra parte, como previamente hemos hecho con las anteriores medidas, también depende el volumen de agua que cabe en la canaleta del ángulo con que se giren las paredes laterales de la misma; por ello, vamos a hallar la fórmula que defina el volumen en función del ángulo.

$$Volumen = \acute{A}rea\ de\ la\ base \cdot Altura\ ; Altura = 500\ cm\ ; \acute{A}rea\ de\ la\ base = \frac{h(B1 + B2)}{2}$$

$$B1 = a\ ; B2 = a + 2x\ ; x = a\cos(\beta)\ ; B2 = a + 2a\cos(\beta)\ ;\ h = a\sin(\beta)$$

$$Volumen = 500\frac{a\sin(\beta)}{2}[a + a + 2\,a\cos(\beta)] = 500\frac{a}{2}\sin(\beta)\,[2a + 2a\cos(\beta)]$$

$$500\frac{a}{2}\sin(\beta)\,[2a + 2a\cos(\beta)] = 500\frac{2a^2}{2}\sin(\beta)\,[1 + \cos(\beta)]$$

$$500\frac{2a^2}{2}\sin(\beta)\,[1 + \cos(\beta)] = 500a^2[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta)$$

Tras haber hallado la función que define el volumen de agua de la canaleta en función del ángulo de giro de sus paredes laterales, vamos a hallar el valor de β que haga máximo el volumen de agua que cabe en la canaleta.

$$g(\beta) = 500a^2[1 + \cos(\beta)]\sin(\beta) = [500a^2 + 500a^2\cos(\beta)]\sin(\beta)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x); f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

$$g'(\beta) = [-500a^2\sin(\beta)]\sin(\beta) + \cos(\beta)\,[500a^2 + 500a^2\cos(\beta)]\ ; g'(\beta) = 0$$

$$500a^2\{-\sin^2(\beta) + [\cos(\beta) + \cos^2(\beta)]\} = 0$$

$$-[1 - \cos^2(\beta)] + \cos(\beta) + \cos^2(\beta) = \frac{0}{500a^2}$$

$$-1 + \cos(\beta) + 2\cos^2(\beta) = 0\ ; \cos(\beta) = A$$

$$A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$A = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

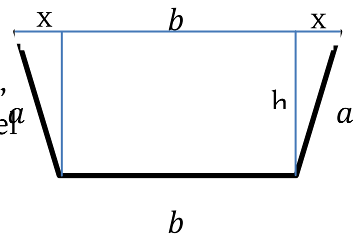
Como hemos visto anteriormente, esta solución no tiene sentido físico, ya que si $\cos(\beta) = -1$; entonces $\beta = \pi\ rad$, con lo que no existiría canaleta.

$$A = \frac{-1+\sqrt{9}}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5\ ;\ \arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Como podemos comprobar, el valor de β que hace máximo el volumen de agua que cabe en la canaleta es $\frac{\pi}{3}$ o, lo que es lo mismo, 60°. Finalmente, vamos a utilizar la equivalencia entre β y x para comprobar que los datos son correctos.

$$\cos(\beta) = \frac{x}{a}\ ; x = \frac{a}{2}\ ; \cos(\beta) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ; \arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}$$

Tras esta comprobación podemos afirmar que los datos son correctos. Los valores que hacen máximo el volumen de agua que cabe en la canaleta son $x = \frac{a}{2}$ y $\beta = \frac{\pi}{3} = 60°$.



Hasta este punto del informe, los cálculos han sido realizados tomando como modelo una canaleta con las tres paredes iguales. A partir de aquí, el modelo que vamos a utilizar será una canaleta en la que la anchura del fondo sea distinta que la de las paredes laterales y la de éstas sea igual entre ellas.

En primer lugar vamos a hallar la función que defina el volumen de agua que cabe en la canaleta en función de X tomando como valores los que aparecen en la representación del corte transversal de la canaleta que se encuentra en el margen.

$$Volumen = \acute{A}rea\ de\ la\ base \cdot Altura$$

$$Altura = 500\ cm\ ; \acute{A}rea\ de\ la\ base = \frac{h(B1+B2)}{2}$$

$$B1 = b\ ; B2 = b + 2x\ ; h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$Volumen = 500\frac{1}{2}(b + b + 2x)\sqrt{a^2 - x^2} = 500\frac{1}{2}2(b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$500\frac{1}{2}2(b + x)\sqrt{a^2 - x^2} = 500(b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = (500b + 500x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x); f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

$$f'(x) = 500\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(500b + 500x)\ ; f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 500\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x(b + x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] = 0$$

$$\frac{a^2 - x^2 - xb - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{0}{500}\ ; a^2 - xb - 2x^2 = 0\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$-2x^2 - bx + a^2 = 0\,; 2x^2 + bx - a^2 = 0\,;\ x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}$$

Esta solución no tiene sentido, ya que el numerador sería negativo y al dividirlo entre un denominador positivo, el resultado sería negativo, y una longitud no puede ser negativa.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}$$

De esta forma, podemos afirmar que éste es el valor de X que hace máximo el volumen de agua que cabe en la canaleta. Tras haber hallado este valor, vamos a hallar el valor del ángulo de giro de las paredes laterales de la canaleta que hace máximo el volumen de agua que cabe en ésta.

$$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura\,; Altura = 500\ cm\,; Área\ de\ la\ base = \frac{h(B1 + B2)}{2}$$

$$B1 = b\,; B2 = b + 2x\,; x = a\cos(\beta)\,; B2 = b + 2a\cos(\beta)\,;\ h = a\sin(\beta)$$

$$Volumen = 500\frac{a\sin(\beta)}{2}[b + b + 2a\cos(\beta)] = 500\frac{a\sin(\beta)}{2}2[b + a\cos(\beta)]$$

$$g(\beta) = \sin(\beta)\,[500ba + 500a^2\cos(\beta)]$$

$$g'(\beta) = \cos(\beta)\,[500ba + 500a^2\cos(\beta)] + [-500a^2\sin(\beta)]\sin(\beta)\,; g'(\beta) = 0$$

$$0 = 500ba\cos(\beta) + 500a^2\cos^2(\beta) - [500a^2\sin^2(\beta)]$$

$$0 = 500ba\cos(\beta) + 500a^2\cos^2(\beta) - [500a^2 - 500a^2\cos^2(\beta)]$$

$$0 = -500a^2 + 500ba\cos(\beta) + 1000a^2\cos^2(\beta)$$

$$-a^2 + ba\cos(\beta) + 2a^2\cos^2(\beta) = \frac{0}{500}$$

$$-a + b\cos(\beta) + 2a\cos^2(\beta) = \frac{0}{a}\,; \cos(\beta) = Y$$

$$Y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}$$

$$\cos(\beta) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}$$

Esta solución no tiene sentido ya que si el coseno de un ángulo es negativo, éste es mayor que 90°, con lo que el volumen de agua que cabría dentro de la canaleta sería claramente menor.

$$\cos(\beta) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\,; (\beta) = \arccos\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\right)$$

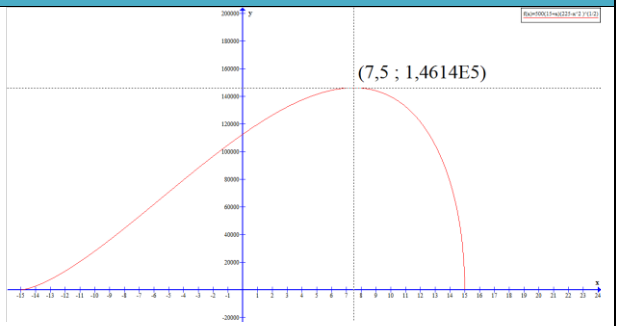
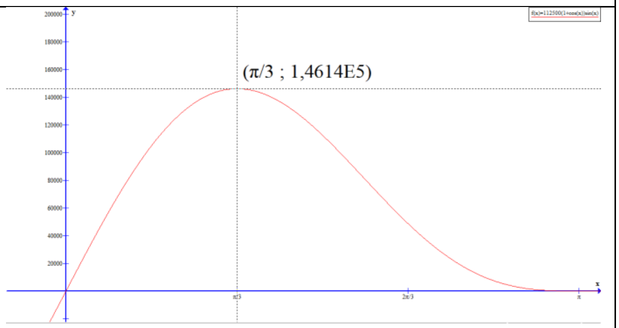
De esta forma, podemos afirmar que el valor de β que hace que el volumen de agua que cabe en la canaleta sea máximo es $\arccos\left(\frac{-b-\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}\right)$. Además, utilizando la relación entre x y β podemos comprobar que los resultados obtenidos son correctos.

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4} \; ; \cos(\beta) = \frac{x}{a}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}}{a} \; ; \cos(\beta) = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a} \; ; \beta = \arccos\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\right)$$

Tras esta comprobación podemos concluir que estos valores son correctos.

Una vez generalizado el modelo vamos a hacer una valoración de los datos obtenidos y de los distintos valores que podrían tomar las variables.

Variable	Dominio con sentido físico	Representación gráfica
X	De 0 a a	
$\boldsymbol{\beta}$	De 0 a $\pi/2$	

Las representaciones gráficas han sido realizadas con el software graficador Graph 4.3 utilizando como valores los del primer apartado y, para que sea más fácilmente apreciable, se han desplazado ambos ejes a valores cercanos al máximo.

Como se puede observar en ambas funciones, según nos acercamos al máximo por la izquierda, el volumen va aumentando, y según nos alejamos de él por la derecha, el volumen vuelve a disminuir.

Variable	Max cuando $a = b = 15$	Max cuando $a = b$	Max cuando $a \neq b$
X	7,5	$a/2$	$\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4}$
$\boldsymbol{\beta}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\arccos\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 + 8a^2}}{4a}\right)$

Otra apreciación que hay que valorar es el hecho de que la largura de la plancha con que se fabrica la canaleta no influye en los valores en los cuales el volumen es máximo, ya que no varía en ningún momento. Durante todo el informe, la largura ha tenido un valor de 5 metros y no ha influido a la hora de calcular los valores que hacen máximo el volumen.

Si bien es cierto que los valores obtenidos en este informe son correctos teniendo en cuenta el modelo que se ha utilizado, en la realidad no se utiliza este tipo de canaleta, sino que tienen forma semicilíndrica dado que el volumen que puede albergar, utilizando la misma plancha para su fabricación, es mayor.

Pongamos que fabricamos una canaleta con una plancha de 45 centímetros de ancho y 5 metros de largo, como hemos hecho en este informe en el primer apartado. Si la forma de la canaleta es como la de este informe, y tomamos los valores máximos que hemos hallado anteriormente, el volumen máximo que podemos obtener es:

$$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura\ ; Altura = 500\ cm\ ; Área\ de\ la\ base = \frac{h(B1 + B2)}{2}$$

$$B1 = 15\ ; B2 = 15 + x + x\ ; h = \sqrt{225 - x^2}; x = 7{,}5$$

$$Volumen = 500\,\frac{(15 + 15 + 7{,}5 + 7{,}5)\sqrt{225 - 7{,}5^2}}{2} = 146141.7869\ cm^3$$

Si la forma de la canaleta es semicilíndrica, entonces el volumen aumenta drásticamente.

$$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura\ ;\ Área\ de\ la\ base = \frac{\pi r^2}{2}\ ; Altura = 500\ cm$$

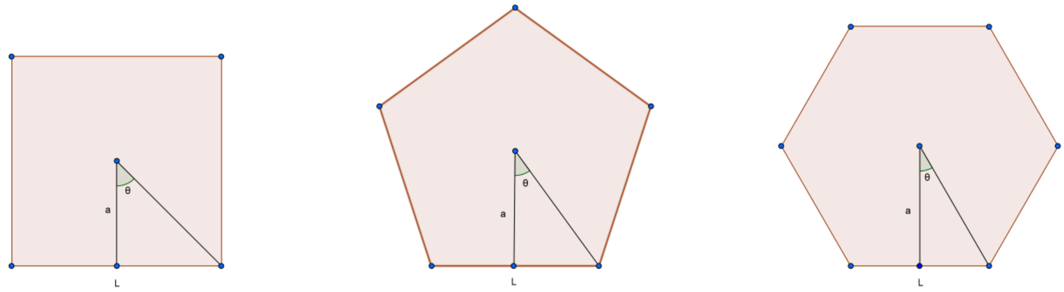
$$Longitud = 2\pi r = 90; r = \frac{90}{2\pi}\ ; Área\ de\ la\ base = \frac{\pi\left(\frac{90}{2\pi}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{8100}{4\pi^2}}{2} = \frac{8100\pi}{8\pi^2} = \frac{8100}{8\pi}$$

$$Volumen = \frac{8100}{8\pi}500 = 161144.3799\ cm^3$$

Tras estas operaciones comprobamos que, con las mismas medidas, el volumen es mayor en una canaleta de forma semicilíndrica que en una canaleta de forma trapezoidal.

Análogamente ocurre con las tuberías, los tubos de conducción de agua son cilíndricos y no poligonales porque el volumen de agua que cabe en ellos, utilizando la misma plancha para su fabricación, es mayor.

Para comprobarlo, vamos a utilizar la ecuación que halla el área de la base utilizando el perímetro y la apotema. El perímetro no va a variar ya que en todas utilizamos una plancha de igual anchura.



$$Volumen = Área\ de\ la\ base \cdot Altura\ ;\ Altura = 500\ cm\ ;\ Área\ de\ la\ base = \frac{p \cdot a}{2}$$

$$Volumen = 500 * Área\ de\ la\ base$$

La apotema es una medida que varía según el número de lados del polígono. Mediante el teorema de Pitágoras, podemos relacionar la apotema con el número de lados.

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}\ ;\ \theta = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}\ ;\ p = Ln$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{1}{2}L}{a} = \frac{L}{2a}\ ;\ L = 2a\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2a\tan(\theta)$$

$$Área\ de\ la\ base = \frac{2a\tan(\theta)\,na}{2} = a^2 \mathrm{n}\tan(\theta)$$

$$Volumen = 500\ a^2 n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Como podemos ver, esta expresión se encuentra en función de dos variables. Al ir aumentando el número de lados, aumenta la apotema acercándose cada vez más a la longitud del radio pero no alcanzándola nunca. De esta forma, podemos determinar que a mayor número de lados, utilizando el mismo perímetro, el volumen es mayor y, teóricamente, el círculo es un polígono de lados infinitos, con lo que el mayor volumen se obtiene cuando la sección del tubo es un círculo, es decir, cuando el tubo es cilíndrico.

ANEXO 4

DOCUMENTO TN-PI-09

PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN EL ESPACIO. UNA GENERALIZACIÓN DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS TRADICIONALES

Índice

2. Un problema

Como en todas las investigaciones matemáticas, todo comienza con un problema. En nuestro caso el enunciado es el siguiente:

¿Será posible rellenar los espacios vacíos del cuadrado (Fig. 1) con enteros positivos, de modo que los números de cada columna y de cada fila formen progresiones aritméticas?

	74			
				186
		103		
0				

Fig. 1

	74			
				186
x		103		
0				

Fig. 2

Siguiendo el modelo de Mason, Burton y Stacey (Mason, J.; Burton, L.; y Stacey, K., 1988) podemos plantear el proceso de la manera que sigue:

2.1. Entrada – Exploración inicial

Sea x el número situado encima del 0 (Fig. 2). Analizando el cuadro, podemos ver que se cumple que:

- x debe ser impar, porque si fuera par, el siguiente número, entre él y 103 no sería entero.

- El número situado entre x y 103 debe ser par para que el número entre él y 74 sea entero.

- Tanteando, se prueba primero con x = 15, x = 17, x = 21 y se ve que no se obtiene solución.

Parece que, en un primer intento no sale la solución. ¿Será que realmente no hay solución?

2.2 Ataque

Vamos a intentar un ataque más en profundidad al problema, usando lo que sabemos de progresiones aritméticas (p.a.):

Llamamos x al número situado encima de 0. Entre x y 103 estará la semisuma de los dos, que tiene como valor: $\frac{x+103}{2}$ Entre $\frac{x+103}{2}$ y 74 estará la semisuma de los dos, que es:

$\dfrac{\frac{x+103}{2}+74}{2} = \dfrac{251+x}{4}$ Por otra parte, el número situado encima de x será 2x, y entre 2x y $\dfrac{251+x}{4}$ podemos calcular la diferencia de la progresión aritmética: $\dfrac{251+x}{4} - 2x = \dfrac{251-7x}{4}$

El número que sigue a $\dfrac{251+x}{4}$ será: $\dfrac{251+x}{4} + \dfrac{251-7x}{4} = \dfrac{251-3x}{2}$

Entre $\dfrac{251-3x}{2}$ y 186 se situará el: $\dfrac{\frac{251-3x}{2}+186}{2} = \dfrac{623-3x}{4}$

Por otra parte, este número también será igual a: $\dfrac{251-3x}{2} + \dfrac{251-7x}{4} = \dfrac{753-13x}{4}$

Por tanto: $\dfrac{753-13x}{4} = \dfrac{623-3x}{4}$ Luego $\begin{array}{l} 130 = 10x \\ x = 13 \end{array}$

Obtenemos, por tanto x = 13. A partir de este resultado, completamos el cuadrado comenzando por el valor de 13, seguimos con 58, 66, 26, 39, etc...

Vemos resuelto de nuevo el problema y el cuadrado queda:

$30 \rightarrow$	52	82	112	142	172
$35 \rightarrow$	39	74	109	144	179
$40 \rightarrow$	26	66	103	146	186
$45 \rightarrow$	13	58	103	148	193
$50 \rightarrow$	0	50	100	150	200
	$\uparrow$ 13	$\uparrow$ 8	$\uparrow$ 3	$\uparrow$ -2	$\uparrow$ -7

Fig. 3

Los números exteriores son las diferencias de las progresiones aritméticas horizontales o verticales correspondientes. Por lo tanto es posible lo pretendido en el problema; tenía solución.

2.3 Revisión-Extensión

La fase de Revisión-Extensión conlleva el planteamiento de otras preguntas sobre el problema, algunas sencillas, pero otras más complicadas; estas últimas son las que abren nuevos campos de investigación.

Comenzamos planteándonos una pregunta bastante lógica: **“¿Se puede encontrar la solución por otro camino?**”

Vamos a exponer diferentes alternativas, que al principio no se veían, pero una vez resuelto el problema de una manera, aparecen de forma sencilla:

2.3.1 Alternativa 1:

Buscando otro método para resolver el problema, se rellena el cuadrado aritmético (Fig. 4) de manera que contenga los datos.

$\downarrow -110+9x$

$74-3x \rightarrow$

3x	74	148-3x	222-6x	296-9x
2x				186
x	$\frac{233-9x}{2}$	103	$\frac{179+9x}{2}$	$76+9x$
0				

$\leftarrow \frac{27-9x}{2}$

Fig. 4

Empezando desde 0 y ascendiendo hasta 3x. Luego, yendo hacia la derecha hallamos la diferencia entre 3x y 74, que es 74 – 3x. Al llegar a 296 – 9x, se halla la diferencia de la progresión aritmética hacia abajo, que es -110 + 9x. Se continúa hacia la izquierda del mismo modo hasta llegar a x. Las expresiones exteriores son las diferencias de cada una de las progresiones que componen una línea, ya sea fila o columna. Al final obtenemos que $x=\frac{233-9x}{2}+\frac{27-9x}{2}$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x=13$. Por tanto, reconstruyendo el cuadrado obtenemos otra vez la solución pedida, por lo que hemos hallado otra forma de resolver el problema

2.3.2 Alternativa 2:

Generalizando a partir del problema, se analiza si se podría construir fácilmente un cuadrado con el cero como único dato inicial (Fig. 5):

0				

4				
3				
2				
1				
0	2	4	6	8

Fig. 5 Fig. 6

Se fija al azar la primera columna y la primera fila del cuadrado (Fig. 6); y en la diagonal entre el 2 y 4 se pone un 3. Resulta entonces el cuadrado de la figura 7

4	6	8	10	12
3	5	7	9	11
2	4	6	8	10
1	3	5	7	9
0	2	4	6	8

Fig. 7

4	10	16	22	28
3	8	13	18	23
2	6	10	14	18
1	4	7	10	13
0	2	4	6	8

Fig. 8

Si en vez del 3 ponemos un 4 resulta un cuadrado como el de la figura 8. Se deduce que en ese lugar se puede poner cualquier número, por tanto la estructura de cualquier cuadrado de esos puede ser como la de la figura 9. En ella debemos tener en cuenta que el número $x+y+d$ puede ser cualquier valor, con tal de tomar d apropiadamente, y a partir de dicha cantidad se rellena el cuadrado con los datos, siguiendo las progresiones aritméticas:

$4x$	$y+4(x+d)$	$2y+4(x+2d)$	$3y+4(x+3d)$	$4y+4(x+4d)$
$3x$	$y+3(x+d)$	$2y+3(x+2d)$	$3y+3(x+3d)$	$4y+3(x+4d)$
$2x$	$y+2(x+d)$	$x+2(y+d)$	$3y+2(x+3d)$	$4y+2(x+4d)$
x	$x+y+d$	$x+2(y+d)$	$x+3(y+d)$	$x+y(y+d)$
0	y	$2y$	$3y$	$4y$

Fig. 9

Llevando esta particularización a nuestro problema, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$103 = x + 2y + 2d$

$74 = y + 3x + 3d$ Resolviéndolo resulta: $d = 5,\ x = 13,\ y = 50$

$186 = 4y + 2x + 8d$ Vemos que el problema queda nuevamente resuelto

2.3.3 Alternativa 3:

Otra forma de resolver el problema puede aparecer fijándonos en determinados cuadraditos y escribiéndolos en función de las diferencias de las progresiones (los números en el exterior representaban las diferencias de cada progresión aritmética fila o columna)

x r p

(2)	*74*			*(4)*	
				186	q
(1)	*(3)*	*103*		*(5)*	
0	*(7)*			*(6)*	n

$$\left.\begin{array}{l}(1): x = 103 - 2n \\ (2): 3x = 74 - q\end{array}\right\}\text{eliminamos } x$$

$$(3): x + n = 103 - n \quad \text{(es lo mismo que la (1))}$$

$$\left.\begin{array}{l}(4): 74 + 3q = 186 + p \\ (5): 103 + 2n = 186 - p\end{array}\right\}\text{sumamos } x$$

$$(6): 186 - 2p = 4y$$

$$(7): 74 - 3r = y$$

y Fig. 10

$de\,(1)\,y\,(2)\,obtenemos: 3(103 - 2n) = 74 - q$; operando queda: $309 - 6n = 74 - q$, o también:

$$\left.\begin{array}{rl} & 235 - 6n = -q \\ de(4)y(5): & 177 + 3q + 2n = 372\end{array}\right\}\text{sustituimos q en la ecuación que se deriva de (4) y (5)}$$

$$3(6n - 235) + 2n = 195$$

$$18n - 705 + 2n = 195$$

$$20n = 900$$

Por tanto n = 45. A partir de n, obtenemos el resto de valores x = 13; p = -7, y = 50, q = 35, r = 8. Esta forma de atacar el problema, poniéndolo todo en función de las diferencias de las progresiones, abre un nuevo camino para estudiar internamente la situación.

2.3.4 Alternativa 4

El problema también podría verse resuelto si en vez de darnos cuatro valores del interior del cuadrado, nos diesen menos, y algún valor de las diferencias de las progresiones aritméticas, por ejemplo la figura 11. Si nos dan como valores conocidos *a, b, p, q* se puede completar el cuadrado fácilmente:

	a			
b				

Fig. 11

a	*(1)*	*(3)*		
	(5)			
(2)	*b*			
	(4)			

Fig. 12

En otro caso similar, como en la figura 12, se pueden poner los valores conocidos en distintas líneas, y después nos fijamos en determinados espacios del cuadrado y los escribimos en función de las diferencias de las progresiones, apareciendo las ecuaciones siguientes:

(1): $b + 2s = a + z$; (2) : $b - y = a - 2t$; (3) : $a + 2z = b + y + 2d$;

(4) : $b - s = a - 3t + x$; (5) : $b + s = a - t + c$

Obtenemos así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Vamos a estudiar si el sistema es determinado. La matriz correspondiente al sistema es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \text{ escalonada queda } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego el determinante es no nulo y hay solución única en el sistema. Lo que no podemos asegurar que la solución esté formada por números enteros, excepto si concretamente lo resolvemos..

3. Preguntas, conjeturas y nuevas ideas

Como su nombre indica, vamos a presentar diferentes preguntas, hipótesis, conjeturas, conceptos, etc, que aparecen de forma más o menos natural, pero sin formalizar; eso se hará más adelante.

3.1 Algunas vías de generalización

Comenzaremos planteándonos algunas preguntas que pueden acercarnos a ideas más generales relacionadas con el problema de partida.

3.1.1. Un problema más general

La solución dada al problema, según la alternativa 2 (punto 2.3.2) da pie a pensar en la posibilidad de que saliera un cuadrado aritmético si cambiáramos el cero por otro número cualquiera. Se puede plantear de la siguiente forma:

Dados unos números *a, b, c, d* arbitrarios, ¿podemos construir un cuadrado de cualquier dimensión, o incluso un rectángulo, verificando que sus filas y columnas son progresiones aritméticas? (Fíg. 15)

$a+b$	$a+b+c+d$
A	$a+c$

Fig. 15

Está claro que en esa situación sí tiene contestación afirmativa la pregunta anterior. Además si a, b, c, d son enteros, entonces el cuadrado resulta de números enteros.

Podemos poner cualquier valor con tal de que no sean redundantes o insuficientes, como por ejemplo

2	*4*	*6*	*8*

Si nos dan estos cuatro valores, situados en la misma fila, no saldría el cuadrado, pues en definitiva sólo nos han dado dos valores independientes.

Y	*t*
X	*z*

Si pasamos a una situación diferente, en la que los valores estén situados, cada uno, en diferentes filas y columnas, ¿tendrá solución? (Esta es la conjetura principal del trabajo).

3.1.2. Unos conceptos más generales

Estos "cuadrados aritméticos" son unas figuras en el plano (espacio bidimensional) que tienen sus análogas en la recta (espacio unidimensional) y en el espacio tridimensional. Vamos a exponerlo de una manera gráfica:

Dado el siguiente cuadrado aritmético (fig. 16), la análoga en la recta es la progresión aritmética tradicional (figura 17) y en el espacio es el paralelepípedo aritmético (figura 17 bis).

y	*t*	
x	*z*	

...•...•............

x *y*

Fig. 17: recta aritmética

Fig. 16: cuadrado aritmético

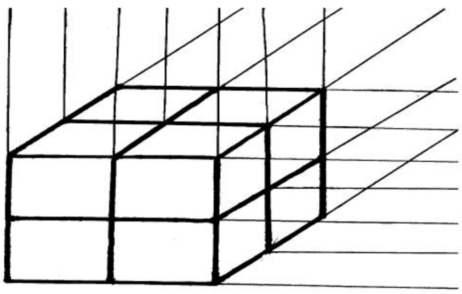


Fig 17 bis: paralelepípedo aritmético

La figura análoga al cuadro aritmético, en el espacio tridimensional, sería el "cubo, o paralelepípedo aritmético", que sería una red de cubitos, y en cada celdilla habría un número. El número mínimo de cubitos que habrían de darnos para completar el cubo aritmético parece que debería ser ocho, por analogía con el plano y la recta, pero esto es una conjetura.

Llegados a este punto, también nos preguntamos si todo lo dicho para progresiones aritméticas serviría para progresiones geométricas, para lo que deberíamos cambiar las sumas por multiplicaciones, las restas por divisiones y los productos por potencias.

3.2.Variaciones sobre el problema

Vamos a exponer algunas variaciones sobre el problema, que nos ayudan a profundizar en el conocimiento de lo que realmente hay en las interioridades del mismo.

3.2.1.Un caso no determinado

Nos planteamos a continuación si con tres únicos valores dados se podrá resolver nuestro problema. Suponemos que los tres valores que nos dieran a, b, c, estuvieran situados de la siguiente forma (Fig. 18):

$t \to$					
	(2)		(3)		C
$z \to$	(1)		B		(5)
$x \to$	*a*		(4)		(6)
	$\uparrow$ y		$\uparrow$ w		$\uparrow$ s

Fig. 18

Si *a, b, c,* son conocidos, se trata de determinar las diferencias de las progresiones aritméticas: *x, y, z, t, w, s*. Las ecuaciones que habría que resolver para hallar la solución del problema serían las de la Figura 19, y la matriz asociada a dichas ecuaciones sería la de la figura 20. Escalonando la matriz se llega a la figura 21, matriz de rango 5, por lo que el sistema no es determinado.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a+y=b-2z \\ (2) & a+2y=c-4t \\ (3) & b+w=c-2t \\ (4) & b-w=a+2x \\ (5) & c-s=b+2z \\ (6) & c-2s=a+4x \end{array}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Fig. 19 Fig. 20 Fig. 21

Si suponemos que nos dan ahora otro cuadrado con tres números, pero situados de diferente modo (Fig. 22):

(1)	*a*			*(2)*	
(3)	*(4)*			*b*	$s \rightarrow$
		(4)			$w \rightarrow$
c	*(5)*			*(6)*	$x \rightarrow$
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$	
y		z		t	

Fig. 22

Las ecuaciones que habría que resolver para hallar la solución del problema serían las de la Figura 23, y la matriz asociada a dichas ecuaciones sería la de la figura 24.

Escalonando la matriz se llega a la figura 25, matriz de rango 5, por lo que el sistema no es determinado.

$$\left.\begin{array}{lc} (1) & a-s=c+3y \\ (2) & a+3s=b+t \\ (3) & b-4w=c+2y \\ (4) & a-z=b-3w \\ (5) & c+x=a-3z \\ (6) & c+4x=b-2t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} & \mathrm{t} & \mathrm{w} & \mathrm{s} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

Fig. 23 Fig. 24 Fig. 25

Por tanto, **con 3 datos parece que el cuadrado tiene varias soluciones**, por lo que el problema no tiene solución única.

Aplicando esta generalización a nuestro problema, si nos dieran los valores 0, 74 y 186, el cuadrado tendría varias soluciones, algunas fraccionarias, otras enteras (Fig. 26 y Fig. 27):

0				
0	*74*	*148*	*222*	*296*
0	*46,5*	*93*	*139,5*	*186*
0	*19*	*38*	*57*	*76*
0	*-8,5*	*-17*		

Fig. 26

4				
3	*74*			
2	*48*	*96*	*140*	*186*
1	*22*			
0	*-4*			

Fig. 27

Vamos a tratar una variante del problema, de forma general:

Si tenemos cuatro elementos conocidos, situados como en la figura siguiente, ¿hay solución para el cuadro aritmético?

			d
		c	
	b		
a			

				d
$h_1+3(v_2-v_1)$			*c*	
$h_1+2(v_2-v_1)$		*b*		
$h_1+(v_2-v_1)$	*a*			
h_1				
	v_1	v_2		

Tenemos que demostrar que existen las diferencias v_1, v_2, h_1 de las correspondientes p.a. filas o p.a. columnas. Se cumple que: $a + v_2 + h_1 = b$; $a+2v_1+2(h_1+2(v_2-v_1))=c$; $a + 3v_1 + 3(h_1 + 3(v_2 - v_1)) = d$ Operando y ordenando tenemos:

$h_1 + v_2 = b - a$; $h_1 - 2v_1 + hv_2 = c - a$; $3h_1 - 6v_1 + 9v_2 = d - a$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Analicemos el rango de la matriz del sistema y la ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 2 & -2 & 4 & c-a \\ 3 & -6 & 9 & d-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & 2 & c-2b+a \\ 0 & -6 & 6 & d-3b+2a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & 2 & c-2b+a \\ 0 & 0 & 0 & d-3b+2a-3(c-2b+a) \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema no tendrá solución si $d - 3b + 2a - 3c + 6b - 3a = -a + 3b - 3c + d \neq 0$. O lo que es lo mismo $3b + d \neq a + 3c$. Vamos a presentar un ejemplo de cada situación. Si partimos de los datos siguientes:

			4
		3	
	2		
1			

Como se cumple que $3 . 2 + 4 = 3 . 3 + 1$, el problema tiene infinitas soluciones:

$v_1 = v_2 = t$ *(arbitrario)*; $h_1 = 1-t$ (t cualquier número real).

Presentamos dos soluciones: para $t = 2$ y $t = 7$

7	6	5	4
5	4	3	2
3	2	1	0
1	0	-1	-2

22	16	10	4
15	9	3	-3
8	2	-4	-10
1	-5	-11	-17

En cambio, si partimos de los datos que figuran a continuación (en la figura de abajo):
Se tiene que $3b + d \neq a + 3c$. Por tanto el sistema de ecuaciones no tiene solución, es incompatible.

			3
		4	
	2		
1			

3.2.2. Unos casos con las diferencias iguales

Otra variación podría ser que las diferencias de todas las progresiones fueran iguales ¿Cuántos valores conocidos necesitaríamos inicialmente? La figura 28 representa la parte inferior izquierda de un cuadrado de cualquier dimensión.

Para obtener un cuadrado con todas sus progresiones aritméticas de igual diferencia, debería ocurrir que: $y - x = z - x = t - y = t - z$. Al operar queda que $y = z$

y	t
x	z

Fig. 28

Por otra parte ocurriría que: $t = y + (y - x)$, siendo $y - x$ la diferencia común, luego $t = 2y - x$. Por tanto necesitamos dos valores conocidos, que son *x, y*, tal como se indica en la figura 29. Los demás valores del cuadro se obtienen al sumar *y-x.*

Fig 29

y	2y-x
x	y

Esta cuestión se vería resuelta también si nos dieran un valor conocido y la diferencia común a todas las progresiones.

De lo anterior se deduce fácilmente que si todas las diferencias son iguales, entonces la RAB es simétrica (respecto de su diagonal principal).

Otra variante podría ser si quisiéramos que todas las progresiones aritméticas horizontales tuvieran una diferencia común y todas las verticales otra común pero diferente, ¿Cuántos valores necesitamos?

y	
x	z

Llamando $y-x$ a la diferencia de todas las progresiones aritméticas verticales, y llamando $z-x$ a la diferencia de todas las progresiones aritméticas horizontales. Obtendríamos así el cuadrado completo, por lo que necesitaríamos tres valores diferentes. También podrían darnos un valor y las dos diferencias de las progresiones, para resolver el problema.

3.3.Estructura del problema

Después de todo lo anterior, estamos en condiciones de hacer un análisis de la estructura del problema, de manera que podamos observar toda su riqueza, su complejidad, etc.

La estructura interna del problema se compone de:

- Cuadrado.
- Valores numéricos dados: cuatro números enteros.
- Progresiones aritméticas con sus respectivas diferencias.

La estructura del problema varía cuando cambiamos alguna de las variables dadas:

- Cuadrado:
  -Rectángulo, Recta, Cubo, Paralelepípedo, etc
- Números dados: cuatro:
  -¿Será el mínimo número?. Si nos dan 3 ...Y si nos dan valores de las diferencias...
- Progresiones aritméticas:
  -Geométricas
- Números enteros positivos:
  -Números enteros, Números fraccionarios, etc

Todas las cuestiones enumeradas hacen referencia a un problema más abierto que podría tener por enunciado:

"¿Bajo que condiciones podemos construir: un cubo, un paralelepípedo, un cuadrado, una recta o un rectángulo aritméticos?"

4. Conceptos, Propiedades y Teoremas nuevos

Como continuación del análisis efectuado anteriormente, pasamos a enumerar resultados nuevos que hemos ido "descubriendo" e "inventando". En ellos se puede ver, de una manera más rigurosa, algunas de las hipótesis y conjeturas planteadas anteriormente, algunas de ellas totalmente demostradas y otras parcialmente.

En el desarrollo de este punto vamos a dar por conocidos varios conceptos de Matemáticas, como son: Espacio Vectorial sobre el cuerpo (R,+,.) de los números reales, Base de un espacio vectorial, Dimensión de un espacio vectorial, idea de grupo y anillo, operación interna o ley de composición interna en un conjunto, etc.

4.1. Redes Aritméticas

-<u>Red Aritmética Bidimensional de n filas y m columnas(nxm)</u>

Denominamos Red Aritmética Bidimensional (RAB) de n filas y m columnas (nxm) a un cuadro de números de la forma $\begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nm} \\ \dots & & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix}$ donde los elementos de cada fila y de cada columna son progresiones aritméticas. También lo escribiremos de la forma siguiente: $(a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$

Al conjunto de todas las RAB de n filas y m columnas lo denotaremos por R(n x m)

-<u>Red Aritmética Tridimensional de dimensiones (nxmxp)</u>

Una Red Aritmética Tridimensional de dimensiones (nxmxp) (R.A.T.) es todo "paralelepípedo" de números (a_{ijk}) donde $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $j \in \{1,2,\dots,m\}$ $k \in \{1,2,\dots,p\}$ de tal manera que si fijamos i, j y variamos k, obtenemos una progresión aritmética. Análogamente, si fijáramos dos cualesquiera y variásemos la tercera que queda, pasaría lo mismo.

Al conjunto de todas las redes aritméticas de dimensiones nxmxp lo denotaremos por R(nxmxp)

-<u>Red Aritmética N-dimensional (n_1xn_2x...n_n)</u>

Llamaremos así a todo "hiperparalelepípedo" de números $a_{i,\,j,\,\dots,\,k}$, donde i toma valores naturales entre 1 y n_1; j entre 1 y n_2; ..., k entre 1 y n_3, de tal forma que si fijamos todos los valores i, j, ..., k, excepto uno de ellos: p, los términos correspondientes forman una p.a. A esta red aritmética de dimensiones (n_1xn_2x...n_N) la denotamos por RAND(n_1, n_2, ... n_N).

-<u>Red Aritmética Unidimensional</u>

Una Red Aritmética Unidimensional de n términos (R.A.U.) es cualquier sucesión de números $a_1, a_2, \dots, a_n$ que formen progresión aritmética. También la escribiremos $(a_i)_{1\le i\le n}$

Al conjunto de todas las RAU de n elementos lo denotaremos por R(n)

-<u>Progresión aritmética fila de una R.A.B. nxm</u>

Progresión aritmética fila de una R.A.B. nxm es cualquier progresión aritmética de elementos de la red que están todos en la misma fila. Las denotaremos por p.a.f. De manera análoga definimos progresión aritmética columna (p.a.c.)

4.2 Redes aritméticas unidimensionales y progresiones aritméticas tradicionales

Como puede observarse en la definición, las redes aritméticas unidimensionales son las progresiones aritméticas tradicionales, por tanto $R(n)$ coincide con el conjunto de las progresiones aritméticas de *n* elementos.

En el conjunto de las progresiones aritméticas de n términos podemos considerar la suma de progresiones aritméticas $(a_i)_{i=1}^n + (b_i)_{i=1}^n = (a_i + b_i)_{i=1}^n$ Con esta operación, el conjunto *R(n)* es un grupo conmutativo porque $(\Re,+)$ también lo es. Veamos alguna de las propiedades más interesantes.

- En el conjunto de las progresiones aritméticas la suma es operación interna:

$$(a_i)_{i=1}^n + (b_i)_{i=1}^n = (a_i + b_i)_{i=1}^n$$

Si $a_i = a + (i-1)d$, siendo a el primer término, d diferencia de la p.a. Análogamente, si $b_i = b + (i-1)d'$, entonces $a_i + b_i = (a+b) + (i-1)(d+d')$, luego $(a_i + b_i)_{i=1}^n$ es una p. a. de primer término *a+b* y diferencia *d+d'*

- La progresión aritmética elemento neutro es $(a_i)_{i=1}^n$ tal que $a_i = \mathrm{O}\ \forall i$

- La progresión aritmética opuesta de una dada $(a_i)_{i=1}^n$ es $(-a_i)_{i=1}^n$

- La operación es asociativa porque la suma en $\Re$ también lo es.

También en el conjunto de las progresiones podemos definir la multiplicación de un número real por una progresión aritmética si α es un número real y $(a_i)_{i=1}^n$ es una progresión aritmética: $\alpha(a_i)_{i=1}^n = (\alpha a_i)_{i=1}^n$ Con esta operación se cumplen las propiedades asociativas y distributivas que nos permiten decir que el conjunto de todas las progresiones aritméticas de n elementos con la suma y el producto por un número real forman un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Re$ de los números reales.

Por tanto, el conjunto $R(n)$ también es un espacio vectorial con la suma de redes y el producto de una red por un número real. La dimensión del espacio vectorial de las progresiones aritméticas es dos ya que podemos encontrar una base del espacio formada por dos progresiones aritméticas:

$$(1)_{i=1}^n \quad = 1,1,1.....1 \qquad\qquad (i-1)_{i=1}^n \quad = 0,1,2.....(n-1)$$

a) Son linealmente independientes, pues si

$$(0)_{i=1}^n = \alpha(1)_{i=1}^n + \beta(i-1)_{i=1}^n = (\alpha 1 + \beta(i-1))_{i=1}^n$$

Luego $0 = \alpha + \beta(i-1)$ para cualquier valor de i entre 1 y n. Por tanto, si i=1 tendremos $\boxed{0 = \alpha}$ y si i=2 tendremos $0 = \alpha + \beta$. Como $\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

b) También son un sistema de generadores:

Dada una progresión aritmética cualquiera del conjunto R(n), $(a_i)_{i=1}^{n}$, siendo $a_i = a + (i-1)d$, podemos poner: $(a_i)_{i=1}^{n} = a(1_i)_{i=1}^{n} + d(i-1)_{i=1}^{n}$, por lo que se genera a partir de las dos iniciales. Por tanto las progresiones aritméticas $\{(1)_{i=1}^{n}; (i-1)_{i=1}^{n}\}$ son base del espacio

4.3 Redes aritméticas bidimensionales y matrices

Como puede observarse en la definición, las RAB *n x m* coinciden con un tipo particular de elementos del conjunto de las matrices de *n* filas y *m* columnas: $M(n,m)$.

Podemos, por tanto, definir en el conjunto R (nxm) de las redes aritméticas bidimensionales unas operaciones:

- **Suma de redes aritméticas bidimensionales de dimensiones nxm**

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Como la suma de progresiones aritméticas vuelve a ser una progresión aritmética, tenemos asegurado que la suma de redes aritméticas bidimensionales es una operación interna. Hay que tener en cuenta que al sumar una progresión aritmética fila de una red aritmética bidimensional con otra progresión aritmética fila resulta una progresión aritmética. Lo mismo ocurre con las progresiones aritméticas columna.

Por tanto, el conjunto $R(nxm)$ con la suma de redes es un grupo conmutativo que está contenido en $M(n,m)$:

La red aritmética bidimensional elemento neutro es $(a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m} = (0_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$, $a_{ij} = 0$ para cualquier *i* y *j*

Dada una red (a_{ij}), su opuesta es $(-a_{ij})$ (omitimos los subíndices). La suma es asociativa por serlo la suma de matrices

- **Producto de un número real por una red aritmética bidimensional**

Si $\alpha \in \Re$, $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$

Esta operación cumple las propiedades usuales de las operaciones externas:

$$(\alpha + \beta)(a_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(a_{ij})$$

$$\alpha((a_{ij}) + (b_{ij})) = \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij})$$

$$(\alpha.\beta)(a_{ij}) = \alpha(\beta(a_{ij}))$$

$$1(a_{ij}) = (a_{ij})$$

Estas propiedades se cumplen porque el conjunto *R* y el de matrices las cumplen. Veamos una de ellas: $(\alpha + \beta)(a_{ij}) = ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(a_{ij})$ porque en $\Re$ se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; por tanto, el conjunto *R* (nxm) con estas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

En $R(nxm), (a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$ lo podemos desarrollar poniendo: $\begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$ pero si de cualquier elemento de $R(nxm), (a_{ij})$, tenemos los términos $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ Con estos cuatro términos podemos obtener todo (a_{ij}). Por ejemplo, si tenemos que: $\begin{matrix} a_{11}=1 & a_{12}=2 \\ a_{21}=3 & a_{22}=4 \end{matrix}$ podemos poner:

3	*4*
1	*2*

9	*10*	*11*	*...*	*...*
7	*8*	*9*	*...*	*...*
5	*6*	*7*	*8*	*9*
3	*4*	*5*	*6*	*7*
1	*2*	*3*	*4*	*5*

El espacio vectorial $R(nxm)$ es de dimensión 4 ya que el conjunto formado por las RAB cuyos cuatro elementos $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ forman una base del espacio. Veámoslo:

a) Son linealmente independientes $\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \chi\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tendríamos $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \chi & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Por tanto $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\chi = 0$, $\delta = 0$

b) También son un sistema de generadores: dada cualquier RAB $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ la podemos obtener como $a_{21}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{11}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A esta base la llamaremos la base canónica del espacio *R(nxm)*.

Siguiendo con las relaciones entre los conjuntos $R(nxm)$ y $M(n,m)$, vamos a analizar la operación producto de matrices, ciñéndonos al caso de matrices cuadradas para que siempre podamos efectuar el producto. El producto es una operación interna en $R(nxn)$. Vamos a demostrarlo, en primer lugar cuando *n=2* , utilizando las p.a.f.

Si tenemos $\begin{pmatrix} a & a+d_1 \\ b & b+d_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & c+e_1 \\ d & d+e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+ad+dd_1 & ac+ae_1+ad+ae_2+d_1d+d_1e_2 \\ bc+db+dd_2 & bc+be_1+bd+be_2+dd_2+d_2e_2 \end{pmatrix}$

Se puede ver que las diferencias, de las p.a.f. de la RAB producto son: para la segunda fila $be_1 + be_2 + d_2 e_2$ y para la primera $ae_1 + ae_2 + d_1 e_2$

Haciéndolo con las p.a.c. también sale, ya que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+d_1 & b+d_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & d \\ c+e_1 & d+e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bc+be_1 & ad+bd+be_2 \\ ac+d_1c+bc+be_1+d_2c+d_2e_1 & ad+d_1d+bd+be_2+d_2d+d_2e_2 \end{pmatrix}$$

Siendo las diferencias de la 1ª columna: $d_1c + d_2c + d_2e_1$ y la de la 2ª columna: $d_1d + d_2d + d_2e_2$. Por tanto en $R(2x2)$ el producto de dos RAB es otra RAB.

Pondremos ahora un ejemplo numérico para que se vea:

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 24 & 11 \end{pmatrix}$ Se puede comprobar que las p.a. obtenidas responden a las fórmulas obtenidas teóricamente.

Veamos ahora lo mismo en $R(3x3)$ para las RAB de dimensiones 3x3. Lo haremos primero para las filas. Si tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & a+d_1 & a+2d_1 \\ b & b+d_2 & b+2d_2 \\ c & c+d_3 & c+2d_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a^1 & a^1+e_1 & a^1+2e_1 \\ b^1 & b^1+e_2 & b^1+2e_2 \\ c^1 & c^1+e_3 & c^1+2e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tenemos que: $a_{11} = aa^1 + b^1a + b^1d_1 + c^1a + 2c^1d_1$

$a_{12} = aa^1 + ae_1 + ab^1 + ae_2 + d_1b^1 + d_1e_2 + ac^1 + ae_3 + 2c^1d_1 + 2d_1e_3$

Por tanto: $a_{12} = (aa^1 + ab^1 + b^1d_1 + c^1a + 2c^1d_1) + ae_1 + ae_2 + ae_3 + d_1e_2 + 2d_1e_3$

Luego: $a_{12} = a_{11} + ae_1 + ae_2 + ae_3 + d_1e_2 + 2d_1e_3$

Por otra parte: $a_{13} = aa^1 + a2e_1 + ab^1 + 2ae_2 + d_1b^1 + d_1 2e_2 + ac^1 + 2ae_3 + 2c^1d_1 + 4d_1e_3$

$a_{13} = aa^1 + b^1a + b^1d_1 + ac^1 + 2ae_{13} + 2c^1d_1 + 2ae_2 + 2ae_3 + 2d_1e_2 + 4d_1e_3$

Luego: $a_{13} = a_{11} + 2(ae_1 + ae_2 + ae_3 + d_1e_2 + 2d_1e_3)$

Por tanto la 1ª fila es p.a con diferencia $ae_1 + ae_2 + ae_3 + d_1e_2 + 2d_1e_3$. Análogamente la 2ª fila cumplirá un resultado análogo, siendo la diferencia de la p.a. $be_1 + be_2 + be_3 + d_2e_2 + 2d_2e_3$

Vamos a ilustrarlo con un ejemplo para que se vea que ocurre:

$$\begin{array}{c} -4\rightarrow \\ 1\rightarrow \\ -6\rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & -2 & -7 \end{array} \end{array} \bullet \begin{array}{c} -3\rightarrow \\ -1\rightarrow \\ 1\rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & -1 & -3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} -22\rightarrow \\ -8\rightarrow \\ 6\rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 26 & 4 & -18 \\ 34 & 26 & 18 \\ 42 & 48 & 54 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ -8 & -22 & -36 \end{array} \end{array}$$

Las diferencias son:

Para la 1ª fila: *6(-3)+6(-1)+6.1+(-4)(-1)+2(-4)(1)=-18-6+6+4-8=-22*

Para la 2ª fila: 3*(-3)+3(-1)+3.1+1(-1)+2.1.1=-9-3+3-1+2=-8*

Que coincide con las fórmulas obtenidas anteriormente

Por último para el conjunto *R(4x4)* , si tenemos

$$\begin{pmatrix} a & a+d_1 & a+2d_1 & a+3d_1 \\ b & b+d_2 & b+2d_2 & b+3d_2 \\ c & c+d_3 & c+2d_3 & c+3d_3 \\ d & d+d_4 & d+2d_4 & d+4d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 & a^1+e_2 & a^1+2e_1 & a^1+3e_1 \\ b^1 & b^1+e_2 & b^1+2e_2 & b^1+3e_2 \\ c^1 & c^1+e_3 & c^1+2e_3 & c^1+3e_3 \\ d^1 & d^1+e_3 & d^1+2e_4 & d^1+3e_4 \end{pmatrix} +$$

Tendríamos, por analogía que la diferencia de la p.a. de la primera fila sería:

$$ae_1 + ae_2 + ae_3 + ae_4 + d_1e_2 + 2d_1e_3 + 3d_1e_4$$

Análogamente, para la segunda fila sería $be_1 + be_2 + be_3 + be_4 + d_2e_2 + 2d_2e_3 + 3d_2e_4$

Tenemos, por tanto, que en el conjunto *R(nxm)* la operación producto de R.A.B. (consideradas como matrices cuadradas) es una operación interna.

La pregunta lógica que sigue es la siguiente: ¿*R(nxm)* es anillo con la suma y el producto de R.A.B.? La respuesta es no, ya que para el producto no hay elemento neutro, pues la matriz identidad no es una R.A.B.

4.4. El Número de Priscila asociado a una Red Aritmética

Vamos a introducir un nuevo concepto, que generaliza el de diferencia de un progresión aritmética; precisamente debemos empezar diciendo que el Nº de Priscila de una red aritmética unidimensional es la diferencia de la p.a. correspondiente.

4.4.1. Para Redes Aritméticas Bidimensionales (RAB)

Demostraremos ahora varios resultados en forma de teoremas:

La sucesión de las diferencias de las p.a.c. es una p.a. Análogamente, la sucesión de las diferencias de las p.a.f es una p.a. Además tienen las dos la misma diferencia.

Para demostrar este resultado partiremos del siguiente esquema, representativo de una R.A.B. En él h_i representa una diferencia de p.a.f. correspondiente a la fila i y v_i la diferencia de la p.a.c. correspondiente:

$$\begin{array}{cccccc} h_4 & \rightarrow & a_1+3v_1 & a_1+h_1+3v_2 & a_1+2h_1+3v_3 & a_1+3h_1+3v_4 \\ h_3 & \rightarrow & a_1+2v_1 & a_1+h_1+2v_2 & a_1+2h_1+2v_3 & a_1+3h_1+2v_4 \\ h_2 & \rightarrow & a_1+v_1 & a_1+h_1+v_2 & a_1+2h_1+v_3 & a_1+3h_1+v_4 \\ h_1 & \rightarrow & a_1 & a_1+h_1 & a_1+2h_1 & a_1+3h_1 \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

Se cumplen las siguientes igualdades:

$$h_2 = (a_1 + h_1 + v_2) - (a_1 + v_1) = h_1 + v_2 - v_1 \Rightarrow h_2 - h_1 = v_2 - v_1$$

$$h_3 = (a_1 + h_1 + 2v_2) - (a_1 + 2v_1) = h_1 + 2(v_2 - v_1) \Rightarrow h_3 - h_1 = 2(v_2 - v_1)$$

$$h_4 = (a_1 + h_1 + 3v_2) - (a_1 + 3v_1) = h_1 + 3(v_2 - v_1) \Rightarrow h_4 - h_1 = 3(v_2 - v_1)$$

Análogamente

$$h_i = a_1 + h_1 + (i-1)v_2 - (a_1 + (i-1)v_1) = h_1 + (i-1)(v_2 - v_1) \Rightarrow h_i - h_1 = (i-1)(v_2 - v_1)$$

Por tanto la sucesión $h_1, h_2, h_3 .... h_n$ es una p.a. de diferencia $(v_2 - v_1)$

De la misma forma, siguiendo un proceso análogo, si tenemos

$$\begin{array}{cccccc}
h_4 & \to & a_1 + 3v_1 & a_1 + 3v_1 + h_4 & a_1 + 3v_1 + 2h_4 & a_1 + 3v_1 + 3h_4 \\
h_3 & \to & a_1 + 2v_1 & a_1 + 2v_1 + h_3 & a_1 + 2v_1 + 2h_3 & a_1 + 2v_1 + 3h_3 \\
h_2 & \to & a_1 + v_1 & a_1 + v_1 + h_2 & a_1 + v_1 + 2h_2 & a_1 + v_1 + 3h_2 \\
h_1 & \to & a_1 & a_1 + h_1 & a_1 + 2h_1 & a_1 + 3h_1 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4
\end{array}$$

$$v_2 = (a_1 + v_1 + h_2) - (a_1 + h_1) = v_1 + h_2 - h_1 \Rightarrow v_2 - v_1 = h_2 - h_1$$

$$v_3 = (a_1 + v_1 + 2h_2) - (a_1 + 2h_1) = v_1 + 2(h_2 - h_1) \Rightarrow v_3 - v_1 = 2(h_2 - h_1)$$

$$v_i = a_1 + v_1 + (i-1)h_2 - (a_1 + (i-1)h_1) = v_1 + (i-1)(h_2 - h_1) \Rightarrow v_i - v_1 = (i-1)(h_2 - h_1)$$

Por tanto la sucesión $v_1, v_2, v_3 .... v_n$ es una p.a. de razón $h_2 - h_1$. Luego las progresiones aritméticas $(v_i)_{i=1}^n$; $(h_i)_{i=1}^n$ tienen la misma diferencia de valor $v_2 - v_1 = h_2 - h_1$ (igualdad obtenida al principio)

Llamaremos **Número de Priscila asociado a una RAB** a la diferencia común de las p.a. $(v_i)_{i=1}^n$ ó $(h_i)_{i=1}^n$

Vamos a encontrar los números de Priscila operando en una RAB, sin salirnos de ella:

En una RAB, si tomamos cuatro elementos "consecutivos" (en el sentido de que están situadas en dos filas y en dos columnas consecutivas) tal como se muestra en la figura: $\begin{bmatrix} a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \\ a_{ij} & a_{i,j+1} \end{bmatrix}$ **Entonces se verifica que si efectuamos $(a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j}) - (a_{i,j+1} - a_{ij})$ obtenemos como resultado el número de Priscila asociado a la R.A.B.**

La demostración es sencilla ya que:

$a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} = h_{i+1}$ (diferencia de la p.a.f. (i+1)-ésima)

$a_{i,j+1} - a_{ij} = h_i$ (diferencia de la p.a.f.i-ésima)

Por tanto $h_{i+1} - h_i$ es el número de Priscila de la R.A.B. que es la diferencia de la p.a. $(h_i)_{i=1}^n$

Hay un resultado análogo con las columnas: $(a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1}) - (a_{i+1,j} - a_{ij}) = v_{j+1} - v_j$

Vamos a ilustrar estos resultados con algún ejemplo numérico:

27	*18*	*9*	*0*	*-9*	$\xrightarrow{-9}$
14	*10*	*6*	*2*	*-2*	$\xrightarrow{-4}$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	$\xrightarrow{1}$
-12	*-6*	*0*	*6*	*12*	$\xrightarrow{6}$
-25	*-14*	*-3*	*8*	*19*	$\xrightarrow{+11}$

$$(2-6)-(4-3)=-5$$

Así $(2-4)-(6-3)=-5$.

Como vemos −5 también es la diferencia de las p.a. 13, 8, 3, -2...; 11, 6, 1, -4, -9...

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 13 & 8 & 3 & -2 & -7 \end{array}$$

Los números de Priscila asociados a las R.A.B. son, en cierto modo, unos invariantes para cada R.A.B., aparecen al operar adecuadamente en cualquier lugar de la R.A.B. y son unas cantidades esenciales para identificar las p.a. asociadas a cada R.A.B.

Otro resultado interesante de los números de Priscila es el siguiente:

Si tenemos dos R.A.B. (a_{ij}),(b_{ij}) del conjunto R(nxm) cuyos números de Priscila asociados son α y β, entonces el número de Priscila asociado a la R.A.B. suma (a_{ij} + b_{ij}) es $\alpha+\beta$.

Para demostrarlo nos vamos a fijar en el esquema siguiente:

Si tenemos dos R.A.B. (a_{ij}),(b_{ij}) del conjunto R(nxm) cuyos números de Priscila asociados son α y β, entonces el número de Priscila asociado a la R.A.B. suma (a_{ij} + b_{ij}) es $\alpha+\beta$.

Para demostrarlo nos vamos a fijar en el esquema siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \\ a_{ij} & a_{i,j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{i+1,j} & b_{i+1,j+1} \\ b_{ij} & b_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{i+1,j} & c_{i+1,j+1} \\ c_{ij} & c_{i,j+1} \end{bmatrix}$$

Utilizando las notaciones anteriores tendremos que

$h_{i+1} = a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j}$ $\qquad$ $h_i = a_{i,j+1} - a_{ij}$

$h'_{i+1} = b_{i+1,j+1} - b_{i+1,j}$ $\qquad$ $h'_i = b_{i,j+1} - b_{ij}$

Por tanto: $c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j} = (a_{i+1,j+1} + b_{i+1,j+1}) - (a_{i+1,j} + b_{i+1,j})$

$$a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} + b_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} = h_{i+1} + h'_{i+1}$$

$c_{i,j+1} - c_{i,j} = (a_{i,j+1} + b_{i,j+1}) - (a_{i,j} - b_{i,j}) = (a_{i,j+1} - a_{i,j}) + (b_{i,j+1} - b_{i,j}) = h_i + h'_i$

Como $\alpha = h_{i+1} - h_i$, $\beta = h_i - h'_i$

$\alpha + \beta = (h_{i+1} - h_i) + (h'_{i+1} - h'_i) = h_{i+1} + h'_{i+1} - (h_i + h'_i)$

Por tanto el número de Priscila de la R.A.B. suma es la suma de los números de Priscila de cada R.A.B. sumando.

- Veamos un ejemplo numérico:

$$\begin{array}{cccc} -9 & & & \\ -4 & 9 & 0 & -9 \\ & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ & 3 & -2 & -7 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{cccc} -3 & & & \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & -1 & -3 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cccc} -12 & & & \\ -5 & 13 & 1 & -11 \\ & 9 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ & 4 & -3 & -10 \end{array}$$

$$\mathbf{-5} \quad \mathbf{+} \quad \mathbf{-2} \quad \mathbf{=} \quad \mathbf{-7}$$

Como puede observarse, la operación suma es compatible con los números de Priscila.

Una consecuencia elemental de la definición del número de Priscila es el siguiente: si tenemos una RAB cuyas diferencias sean todas iguales, entonces el número de Priscila es igual a cero.

4.4.2. El caso de Redes Aritméticas Tridimensionales

Si tenemos una R.A.T., con elementos $(a_{i,j,k})$ siendo $1 \le i \le n \;\; ; 1 \le j \le m \;\; ; 1 \le k \le p$, sabemos que para cada *i=1,2,...,n* fijado de antemano, los elementos $(a_{i,\propto,\beta})_{1\le\propto\le m}^{1\le\beta\le p}$ forman una RAB, de lo que podemos calcular su número de Priscila P_i :

$$P_i = a_{i,\propto,\beta+1} - a_{i,\propto,\beta} - (a_{i,\propto+1,\beta+1} - a_{i,\propto+1,\beta})$$

Esto lo podemos hacer para cualquier valor $\propto$, siendo $1 \le \propto \le m-1$ y cualquier valor β : $1 \le \beta \le p-1$. Llamaremos Número de Priscila de la RAT al número: $|p_{i+1} - p_i|$

Lo denominamos como valor absoluto para tener libertad a la hora de efectuar la resta, así da igual el orden en que la hagamos. Además así nos da igual cual es el comienzo o el final de las progresiones aritméticas; da igual que vayamos del principio al final o del final al principio en cada progresión aritmética. También lo podíamos haber hecho así en la RAB, pero allí la situación no tenía tanta dificultad con los subindices y se calculaba con más facilidad.

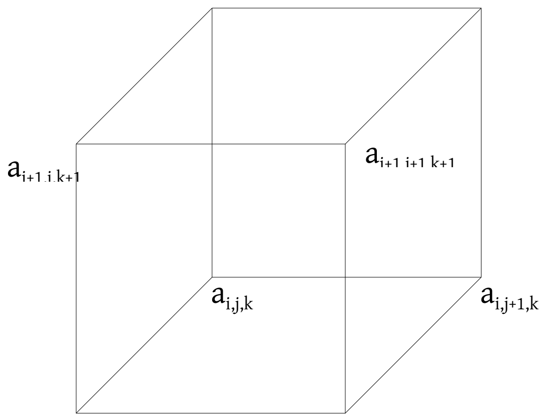
La definición la hemos dado una vez fijado *i*. Podíamos haber definido el Nº de Priscila de una RAT fijando j ó *k*. Vamos a hacerlo y a comprobar que la diferencia no depende i, j, k; es decir, que se cumple: $|p_{i+1} - p_i| = |p_{j+1} - p_j| = |p_{k+1} - p_k|$

Veamos en una figura cual es la situación de una manera gráfica:

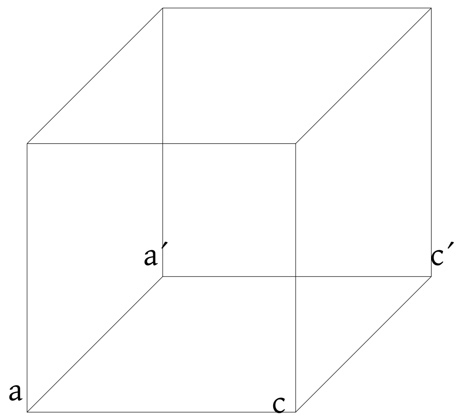
$a_{i,j,k+1}$ $a_{i,j+1,k+1}$

$a_{i+1,j,k}$ $a_{i+1,j+1,k}$

b a´ d d´



Los ocho elementos, que intervienen, los podemos considerar como “vértices” de un “cubo” y ,



por tanto, el Nº de Priscila de la RAT es la diferencia en valor absoluto entre los Nº de Priscila de las dos RAB que podemos imaginar al cortar el “cubo” en dos capas siguiendo cualquiera de las tres dimensiones. En cada caso nos quedaría:

$$|p_{i+1} + p_i| = |b - a - (d - c) - [b' + a' + (d' - c')]| = |b - a - d + c - b' + a' + d' - c'|$$

$$|p_{i+1} + p_i| = |a_{i+1,j+1,k+1} - a_{i+1,j+1,k} - (a_{i,j+1,k+1} - a_{i,j+1,k}) - [a_{i+1,j,k+1} - a_{i+1,j,k} - (a_{i,j,k+1} - a_{i,j,k})]| =$$

$$= |d - c - d' + c' - b + a + b' - a'|$$

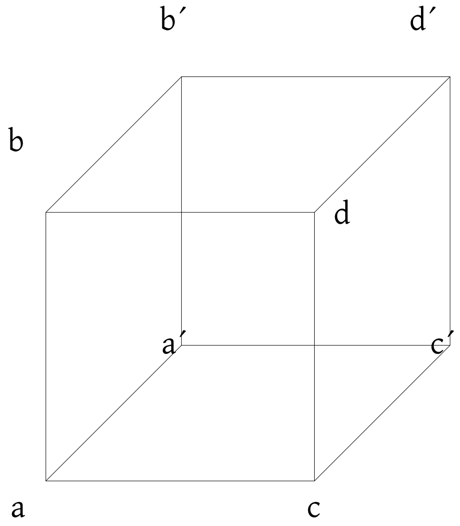
Con lo que hemos visto que coinciden. Análogamente se haría con $|p_{k+1} - p_k|$

$$|p_{k+1} + p_k| = |b - d - (b' - d') - [a - c - (a' - c')]| = |b - d - b' + d' - a + c + a' - c'|$$

Por tanto la definición es coherente.

Hay otra forma de definir el Nº de Priscila de una R.A.T. que es la equivalente a la anterior, y que generaliza el concepto de Nº de Priscila de una manera más lógica que la primera que hemos descrito con anterioridad.

Para ello partimos de una RAT dada por los ocho elementos consecutivos de la figura.



Consideramos ahora las RAB cuyos elementos son las diferencias de las progresiones aritméticas que se forman en la RAT; obtenemos:

b-a	*d-c*
b´-a´	*d´-c´*

b-d	*b´-d´*
a-c	*a´-c´*

a-a´	*c-c´*
b-b´	*d-d´*

Si calculamos ahora el Nº de Priscila de estas RBA obtenemos para cada una:

Para la primera: $d - c - (d´ - c´) - [b - a - (b´ - a´)] = d - c - d´ + c´ - b + a + b´ + a´$

Para la segunda: $b´ - d´ - (a´ - c´) - [b - d - (a - c)] = b´ - d´ - a´ + c´ - b + d + a - c$

Para la tercera: $d - c - (d´ - c´) - [b - a - (b´ - aa´)] = d - c - d´ + c´ - b + a + b´ + a´$

Como podemos observar, el Número de Priscila de la RAT es el valor absoluto del Nº de Priscila de cualquiera de esas RAB.

4.4.3. El caso de Redes Aritméticas N-dimensionales

Podríamos definir también el número de Priscila para una RAND. En primer lugar lo vamos a explicar en el caso n = 4 y después en general.

En el caso en que n = 4 tendríamos una red aritmética 4-dimensional. Si para cada una de las dimensiones calculamos la RAT de las diferencias de las p.a. que forman los elementos de la RA4D, obtenemos 4 redes aritméticas tridimensionales. El Nº de Priscila de cualquiera de estas 4 RAT es el Nº de Priscila de la RA4D.

Así podríamos definir el Nº de Prisicla de una RAND como el Nº de Priscila de cualquiera de sus n redes aritméticas (n – 1)-dimensionales formadas por las diferencias de las p.a. que forman los elementos de la RAND

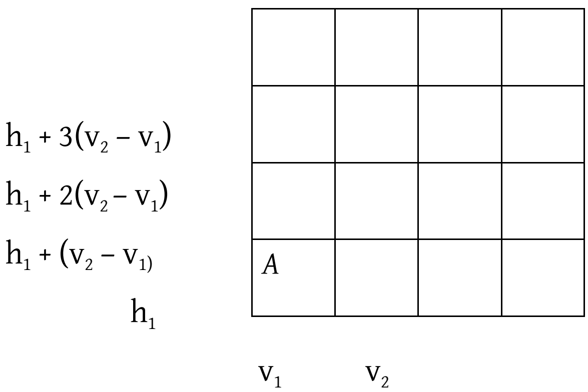
4.5. Vuelta al problema inicial

Hemos visto en el punto 3.2.1. que aunque tengamos una R.A.B. en la que conozcamos cuatro elementos colocados cada uno en diferentes filas y columnas, puede haber varias soluciones o ninguna para la R.A.B.

Ahora vamos a mostrar una demostración de tipo constructivo que nos resuelve la pregunta siguiente:

Si en una R.A.B. conocemos los cuatro elementos a = $a_{1,1}$; b = $b_{2,i}$; c = $c_{3,j}$; d = $d_{4,k}$, ¿cuándo quedará determinada la R.A.B., en función de los valores de i, j, k?

Para responder a esta pregunta, vamos a partir de la siguiente figura:



Tenemos que ver si existen v_1, v_2, h_1, de manera que podamos obtener los demás valores conocidos a partir de a y de las diferencias v_1, v_2, h_1. Se cumple que:

$a + v_1 + (i - 1)(h_1 + (v_2 - v_1)) = b$

$a + 2v_1 + (j - 1)(h_1 + 2(v_2 - v_1)) = c$

$a + 3v_1 + (k - 1)(h_1 + 3(v_2 - v_1)) = d$

Operando y ordenando en las incógnitas v_1, v_2, h_1 obtenemos:

$(i - 1)h_1 + (2 - i)v_1 + (i - 1)v_2 = b - a$

$(j - 1)h_1 + (4 - 2j)v_1 + 2(j - 1)v_2 = c - a$

$(k - 1)h_1 + (6 - 3k)v_1 + 3(i - 1)v_2 = d - a$

Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas será determinado si su determinante es distinto de cero. Veamos cuándo ocurre eso:

$$\begin{vmatrix} i-1 & 2-i & i-1 \\ j-1 & 4-2j & 2(j-1) \\ k-1 & 6-3k & 3(k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i-1 & 2-i & i-1 \\ j-1 & 2(2-j) & 2(j-1) \\ k-1 & 3(2-k) & 3(k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i-1 & 1-(i-1) & i-1 \\ j-1 & 2-2(j-1) & 2(j-1) \\ k-1 & 3-3(k-1 & 3(k-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i-1 & 1 & i-1 \\ j-1 & 2 & 2(j-1) \\ k-1 & 3 & 3(k-1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i-1 & i-1 & i-1 \\ j-1 & 2(j-1) & 2(j-1) \\ k-1 & 3(k-1) & 3(k-1) \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ j-1 & 2 & j-1 \\ k-1 & 3 & 2(k-1) \end{vmatrix}$$

Los pasos excluidos consisten en descomponer el determinante que no es nulo (de los dos que están restados) en suma de otros dos, separando la tercera columna en dos sumandos. Operando llegamos a que el valor del determinante es: k (4i – j – 3) + j (4 – 3i) – i

Vamos ahora a discutir los valores posibles de esa expresión, fijando en sucesivos casos los valores de i y dejando variar los valores j y k.

- Si i = 1, entonces operando podemos poner

k (4i – j – 3) + j (4 – 3i) – i = k (4i – j – 3) + j (4 – 3) – 1 = k (1 – j) + j – 1 = (k – 1) (1 – j)

Si el determinante es igual a 0 $\Rightarrow$ k = 1 ò j = 1

Luego i = 1, k = 1, j = cualquier valor

i = 1, j = 1, k = cualquier valor. Tenemos que, en ambos casos, el determinante es cero. Luego la RAB no está determinada de manera única en estos casos.

Luego si i =1, j$\neq$1, k$\neq$1 , entonces el determinante es no nulo y existe solución única para las R.A.B.

- Si i = 2, entonces k (4i – j – 3) + j (4 – 3i) – i = k (8 – j – 3) + j (4 – 6) – 2 = 5k – kj – 2j – 2

¿Cuándo será cero esa expresión? 5k – kj – 2j – 2 = 0 $\Rightarrow$ k (5 – j) = 2j + 2 $\Leftrightarrow$ $k = \dfrac{2j+2}{5-j}$

Los posibles valores de j son 1, 2, 3, 4. Por tanto: j = 1$\Rightarrow$k = 1 ; j = 2$\Rightarrow$k = 2 ; j = 3$\Rightarrow$k = 4 ; j = 4$\Rightarrow$k = 10. Para estos valores de j (con i = 2) el determinante es cero.

Por tanto si i = 2 el determinante es cero (pues $1 \leq j \leq 4$) y habrá varias soluciones o ninguna para la R.A.B.. Para saberlo habrá que estudiar cada caso concreto, con los valores de i, j, k.

- En general, fijando el valor i, tenemos que el determinante del sistema es cero cuando

k (4i – j – 3) + j (4 – 3i) – i = 0 ; k (4i – j – 3) - j (3i – 4) – i = 0 ; k (4i – j – 3) = j (3i – 4) + i

Por tanto $k = \dfrac{j(3i-4)+i}{4i-j-3}$. Como el caso i = 1, lo hemos estudiado, veamos qué pasa para $i > 1$

Si $i > 1 \Rightarrow 3i - 4 > 0 \Rightarrow j(3i-4) + i > 0$. Por tanto debe ser también el denominador mayor que 0 para que exista k, por tanto $4i - j - 3 > 0 \Rightarrow j < 4i - 3$. Por tanto, j tiene un número de valores fijado para cada valor de i. Por tanto, para cada valor de i podemos calcular los posibles valores de j y en cada caso ver si la R.A.B. queda determinada, indeterminada o no existe.

- Si i = 3 el determinante será cero cuando $k = \dfrac{j(5)+3}{9-j}$ Veamos los posibles valores que resultan:

j = 1 $\Rightarrow$k = 1 ; j = 2 $\Rightarrow$k = $\dfrac{13}{7}$ (no puede ser) ; j = 3 $\Rightarrow$k = $\dfrac{18}{6} = 3$; j = 4 $\Rightarrow$k = $\dfrac{23}{5}$ no puede ser

j = 5 $\Rightarrow$k = $\dfrac{28}{4} = 7$; j = 6 $\Rightarrow$k = $\dfrac{33}{3} = 11$; j = 7 $\Rightarrow$k = $\dfrac{38}{4}$ (no puede ser) ; j = 8 $\Rightarrow$k = 43

Por tanto, tenemos que

Si $i = 3$, $j = 1$, $k = 1$; $i = 3$, $j = 3$, $k = 3$; $i = 3$, $j = 5$, $k = 7$; $i = 3$, $j = 6$, $k = 11$;

$i = 3$, $j = 8$, $k = 43$, la R.A.B. no tiene solución o tiene varias. En cada caso habrá que estudiar el sistema concreto resultante.

5. Problemas abiertos

El trabajo ha generado unos resultados nuevos a nivel conceptual y de propiedades o teoremas, pero también ha dejado al descubierto cuestiones mucho más complejas que quedan abiertas para una continuación del trabajo. Entre ellos vamos a citar los más interesantes:

- El problema más general, que consiste en la determinación o no de una R.A.B. a partir de cuatro elementos conocidos cualesquiera $a_{i,j}$; $b_{k,l}$; $c_{p,q}$; $d_{r,s}$ queda sin resolver (y no es válida la conjetura que parecía más adecuada (punto 3.2.1)), pues hemos resuelto un caso particular de forma constructiva. En este caso se trata de discutir el valor de un determinante de orden cuatro muy complejo. Es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} (i-1)(2-j) & (j-1)(i-1) & (j-1) & 1 \\ (k-1)(2-l) & (l-1)(k-1) & (l-1) & 1 \\ (p-1)(2-q) & (p-1)(q-1) & (q-1) & 1 \\ (r-1)(2-s) & (r-1)(s-1) & (s-1) & 1 \end{vmatrix}$$

- Otra línea abierta sería continuar trabajando en las relaciones entre las redes aritméticas y los conjuntos conocidos; ya sea el de las matrices o el de las progresiones aritméticas tradicionales. El hecho de que R(nxm) no sea anillo cierra algunas posibilidades...

- Aunque no lo hemos hecho explícito en el trabajo, si en vez de progresiones aritméticas fueran progresiones geométricas no cabe un tratamiento análogo pues la suma de progresiones geométricas, en general, no es una operación interna...

- Los Números de Priscila, hemos visto que son compatibles con la suma de R.A.B., pero no hemos entrado en lo que pasa para el producto de R.A.B.. Seguro que también son compatibles pero con unas relaciones más complicadas...Por ejemplo, se puede comprobar que al multiplicar dos RAB, la RAB producto tiene un Nº de Priscila que se puede obtener a partir de operaciones sencillas con las diferencias de las p.a. filas y columnas de las RAB factores, pero la relación entre los Nº de Priscila de las RAB factores y el de la RAB producto no se ve...El comienzo sería lo siguiente:

$$\begin{array}{c|c|c|} d-b & b & d \\ \hline c-a & a & c \\ \hline & b-a & d-c \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|} d'-b' & B' & d' \\ \hline c'-a' & A' & c' \\ \hline & b'-a' & d'-c' \end{array} = \begin{array}{c|c|c|} (bd'+dc')-(bb'+da') & bb'+da' & bd'+dc' \\ \hline (ad'+cc')-(ab'+ca') & ab'+ca' & ad'+cc' \\ \hline & (bb'+da')-(ab'+ca') & (bd'+dc')-(ad'+cc') \end{array}$$

Observamos que la suma de los productos de las diferencias de las p.a.c. de la primera RAB y las diferencias de las p.a.f. de la segunda RAB es igual al número de Priscila de la RAB producto

$(b - a)(d' - b')+(d - c)(c' - a') = bd' - bb' - ad' + ab' + dc' - da' - cc' + ca'$

- Un caso no estudiado en profundidad es el de las diferencias iguales en todas las líneas (filas o columnas). Posiblemente, tenga interés porque al ser todas las diferencias iguales aumentan las "regularidades", las redes son simétricas...

- La determinación de una RAT a partir de 8 de sus elementos es un problema que no hemos abordado, pero que tiene suficiente envergadura como para dar lugar a un nuevo trabajo. Es evidente que en el caso en que conozcamos los valores de los elementos

$$a_{1,1,1}; \quad a_{2,1,1}; \quad a_{1,2,1}; \quad a_{1,1,2}; \quad a_{2,2,1}; \quad a_{2,1,2}; \quad a_{1,2,2}; \quad a_{2,2,2}$$

la RAT está determinada...

6. Reflexión final

Durante la realización de este trabajo de investigación nos hemos encontrado con diversas dificultades, pero también hemos obtenido bastantes logros y resultados muy interesantes.

Personalmente he tenido la oportunidad de aprender el método para la investigación en matemáticas, la forma de generalizar los conceptos y los problemas, y que los resultados no siempre son los deseados.

Al comenzar este trabajo, a partir del problema inicial, no parecía que fuesen a salir ideas interesantes, pero a medida que se iba avanzando en el mismo, poco a poco fueron surgiendo.

Conseguimos también generalizar el concepto de progresión aritmética, y relacionar los nuevos conceptos de redes aritméticas con conceptos ya conocidos como son las progresiones aritméticas, las matrices y los espacios vectoriales; así como profundizar en conceptos como espacio vectorial y dimensión, que sirvieron para comprender el funcionamiento de los conceptos nuevos.

Al seguir investigando, identificamos números "constantes" para cada R.A.B., los llamados Números de Priscila, que tienen su interés.

En el desarrollo de esta investigación, se ha resuelto parcialmente un problema muy general que subyace en todo el trabajo.

En cuanto a las dificultades que hemos encontrado durante la realización de este trabajo de investigación, nos hemos encontrado con algunas situaciones que en principio parecían sencillas pero se han complicado considerablemente; es decir, lo que en principio parecía ser una posible solución natural, luego no funcionaba.

Para la realización de este trabajo hay que usar una notación bastante liosa, de tal manera que para que quede una presentación aceptable, se han necesitado una gran cantidad de horas de trabajo frente al ordenador.

Así mismo, al ver que las cosas no salen como uno se espera, se producen muchos altibajos en el estado de ánimo.

Como conclusión, se puede pensar que en Matemáticas también podemos investigar tanteando, probando cosas nuevas, aplicándolas a otras conocidas, etc. También consideramos que el proceso de investigación en Matemáticas tiene muchas similitudes con lo que pasa en ciencias experimentales, aunque no siempre trate de fenómenos físicos o químicos, sino de conceptos mentales.

7. Bibliografía

- ABBOTT, E. A., 1976. *Planilandia*. Ed. Punto Omega/Guadarrama
- CAÑÓN, C.,1993. *La Matemática. Creación y descubrimiento.* Univ. Pontificia de Comillas. Madrid
- GUZMÁN, M. de, 1991. *Para pensar mejor.* Ed. Labor. Barcelona.
- GRUPO DECA,1989. *Didáctica de la resolución de problemas*. Ed. CEP de Burgos
- LAKATOS, I., 1976. Prueba y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza Editorial. Madrid.
- MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K., 1988. *Pensar matemáticamente*. Ed. Labor & M.E.C., Barcelona
- POLYA, G., 1965. *Cómo plantear y resolver problemas* Ed. Trillas. México.
- Apuntes de Matemáticas de la Escuela Politécnica Superior de Burgos. Departamento de Matemáticas y Computación. Curso 2002-03.
- VIZMANOS, J.R., ANZOLA, M., *Algoritmo, Matemáticas II*. Ed. S.M., Madrid

ANEXO 5

DOCUMENTO FC-SG-09

MODELOS PARA LA CORRECCIÓN DE NOTAS

Resumen

La realización de la monografía está basada en un problema que a menudo se plantean tanto profesores como alumnos: "*Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección [...]*"

Según lo dicho, deberemos establecer una relación de dependencia entre las dos magnitudes, la calificación previa y la definitiva, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponda un único valor de la segunda. Esto es lo que se define precisamente como una función. En nuestro trabajo estudiaremos cualitativamente y cuantitativamente diferentes tipos de funciones para encontrar la solución correcta que satisfaga el problema inicial.

Con este propósito hemos estudiado diferentes modelos funcionales: lineales, radicales, logarítmicos, exponenciales y trigonométricos. En primer lugar aquellos más intuitivos y seguidamente otros más específicos; no obstante, no encontramos el modelo correcto sino que analizando los puntos a favor y en contra pudimos llegar a que diferentes factores satisfacen situaciones diferentes.

Además existe una amplia variedad de modelos que pueden surgir a partir de otros, teniendo en cuenta aquellos que seguramente no mencionamos. Aquí es cuando el investigador se encuentra algunas limitaciones y que le obliga a elegir aquellos aspectos más representativos y analizarlos en profundidad, aunque es cierto que ciertas cuestiones las hemos dejado simplemente planteadas por la falta de espacio. Concluiremos señalando una posible línea del trabajo como son los interesantes modelos trigonométricos.

Índice

1. Introducción

Estamos cercados por problemas. Y es que nuestra vida cotidiana gira en torno a la resolución de dificultades. No obstante, nuestro objetivo debe ser enfrentarnos a ellos para así encontrar la solución más sencilla y práctica. Aquí, es cuando intervienen las matemáticas ya que, si somos capaces de transformar una situación real en un problema matemático, éste podrá casi siempre ser resuelto. Por ello las matemáticas son polifacéticas y aplicables a una considerable cantidad de disciplinas. Esta será la característica a la que recurriremos para llevar a cabo la realización de nuestro trabajo.

Comenzaremos haciendo una aproximación de las características que deberán cumplir todas las funciones ya que no podemos olvidar que estamos trabajando con datos que se aplican a la vida real. En un principio las funciones serán continuas con dominio $x \in [0,+\infty)$ y derivables en $x \in (0,+\infty)$ para poder calcular algunos elementos de las funciones como máximos o mínimos. A medida que vayamos avanzando en el trabajo surgirán otras características, sin embargo debemos tener en cuenta en todo momento las siguientes consideraciones:

- ¿Qué queremos hacer con las calificaciones: aumentarlas o disminuirlas?
- ¿De qué manera podemos hacerlo?
- ¿Cómo podemos mejorar los resultados obtenidos?

2. Primeros modelos de corrección

Comenzaremos analizando la función más simple de todas las posibles; la que viene dada de la forma: $y = x$

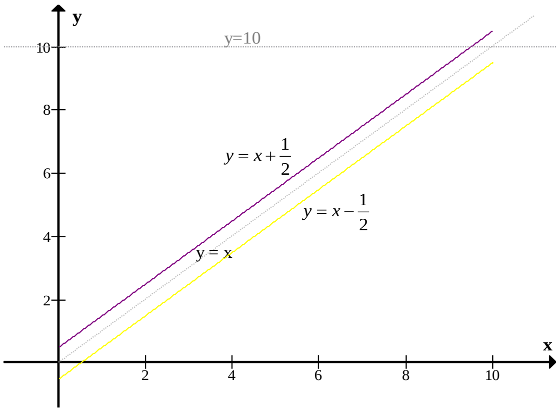
Esta es la función que explica el problema inicial. Ésta nos servirá por tanto como patrón de comparación con los datos obtenidos de otras funciones.

A continuación pensaremos en funciones de primer grado que corresponderán con los factores de corrección más intuitivos: variar la nota una cantidad fija, variar un porcentaje de la nota o redondearla.

2.1. Modelos lineales: $y = mx \pm c$

Partimos de la expresión algebraica de la función: $y = mx \pm c$.

Si analizamos el caso del ejemplo, suponiendo que la nota varia una cantidad $c = 0{,}5$, obtenemos la siguiente gráfica:



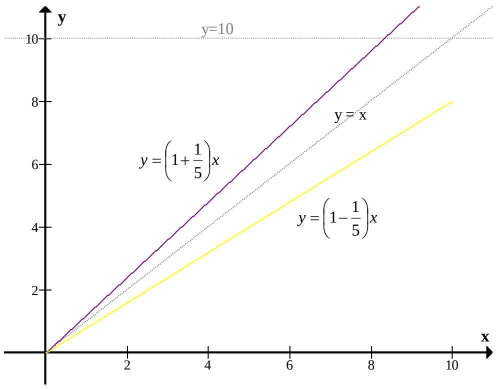
Analizando los resultados obtenidos, observamos que este método no es tan efectivo como primeramente se pensaba ya que, la calificación máxima y mínima se salen de sus límites, cosa que no parece lógico en un principio. A demás debemos tener en cuenta que el 5 es una nota relevante ya que constituye el límite entre el aprobado y el suspenso. Por tanto no sería lo mismo aumentar un 4 que un 7. A continuación analizaremos otros factores para evitar los fallos del factor lineal de la forma $y = mx \pm c$.

Para solucionar el problema anterior, probaremos variando la nota un porcentaje. En un principio, parece una solución más adecuada ya que no se subiría a todas las notas la misma cantidad, sino que dependiendo de la calificación la nota definitiva variará más o menos. Además la calificación mínima la deja como está. Este tipo de funciones viene dado por la expresión: $y = mx$.

Si ponemos un ejemplo, el factor será:

$$y = x \pm \frac{p \cdot x}{100} = \frac{100x \pm p \cdot x}{100} = x\left(\frac{100 \pm p}{100}\right) = x\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

Siendo p el porcentaje que variaremos la nota ($p = 20$) la gráfica será:



Graficamente observamos que las notas más altas se ven más afectadas, son las que más aumentan al sumar p y también las que más disminuyen al restarlo. Además, vuelven a surgir problemas con las notas altas ya que sobrepasan los límites establecidos. Por tanto, no tendría sentido desde un punto de vista formal ya que la función debería obtener unos valores entre 0 y 10.

2.2. Modelo de redondeo

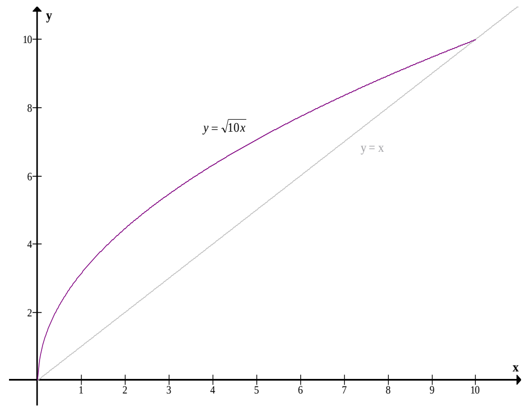
El modelo del redondeo viene dado por la función parte entera. Esta función realiza lo que nocostros conocemos comúnmente como redondear. Esto significa que aquellas cifras decimales cuyo valor sea 5 o mayor pasan a tener una unidad más. Si aplicamos esto en el ejemplo, la tabla de datos quedará:

Alumno	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Nota inicial	0	3	4	4,5	5	6	6,75	9	10
Nota redondeada	0	3	4	5	5	6	7	9	10

En estos casos ninguna nota se sale del límite estipulado. Sin embargo en este caso subimos Lo mismo a un 4,1 que a un 4,9, lo cual no parece lógico. Para buscar otras alternativas analizaremos la función parte entera: $y=E[x]$. En esta función podemos hacer algunos cambios, por ejemplo si sumamos una cantidad fija: $y=E[x]\pm 1$. Pero, de este modo se repiten problemas como que la variación de notas puede ser ilógica o que en algunos casos las notas finales no tienen sentido. Por tanto volvemos al principio del problema. Y puesto que estos factores no son viables, investigaremos otros nuevos.

2. El modelo radical

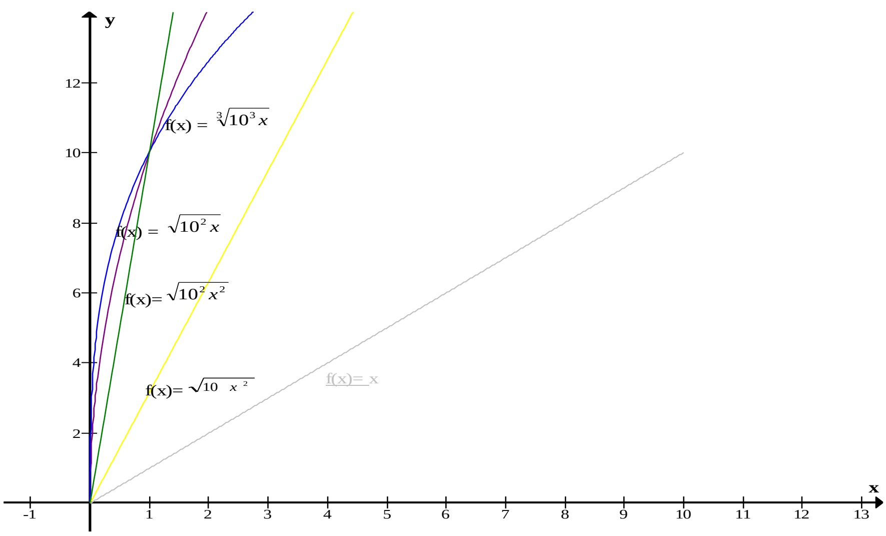
Una vez investigados los factores de corrección más intuitivos, nos centraremos en encontrar funciones cuyo dominio sea $x \in [0,10]$. En esta búsqueda hemos llegado al



modelo radical que viene dado por la función: $y = \sqrt{10x}$.

Para estudiar con más detenimiento la función la dibujaremos:

De este modo hemos cumplido uno de nuestros objetivos, ninguna nota se sale de los límites establecidos. La función es creciente pero crece cada vez más despacio. Esto se debe a que la pendiente de la función, es decir el valor de la derivada es cada vez menor. A continuación lo comprobaremos:



$$y' = \frac{10}{2\sqrt{10x}} = \frac{5}{\sqrt{10x}}$$

$y'(2,5) = 1$; $y'(8,1) = 5/9$; $y'(10) = 1/2$

Analizando los resultados, observamos que esta función favorece más a las notas más bajas que a las altas ya que 2,5 se transforma en 5 y 8,1 en 9.

A continuación, variaremos diversos elementos del factor radical para obtener otros factores similares. Éstos elementos son: el índice de la raíz o los exponentes. Como la función debe tomar valores entre 0 y 10, las siguientes funciones no nos sirven:

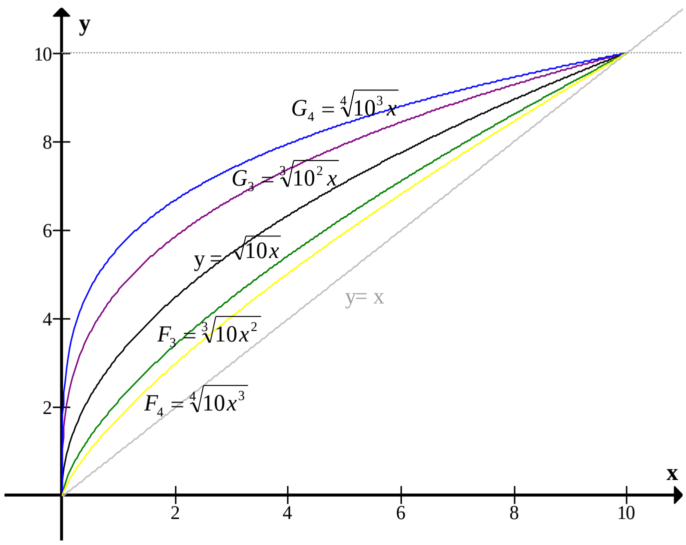
Vemos por tanto, que los exponentes y los índices deben variar según una relación y no aleatoriamente como previamente hemos hecho. Los exponentes deben ser una unidad menor que el índice de la raiz. Además no pueden acompañar simultáneamente exponentes al coeficiente y a la incógnita. Según esto tenemos dos tipos de funciones: $F_n(x) = \sqrt[n]{10x^{n-1}}$ y $G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1}x}$.

Debemos tener en mente que: $x \in [0{,}10]$, $x \in N, x \geq 2$. Ya que en caso contrario, las funciones no tienen sentido. En general, para las notas comprendidas entre 0 y N, es decir, $x \in [0, N]$ tendríamos:

$$F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$$

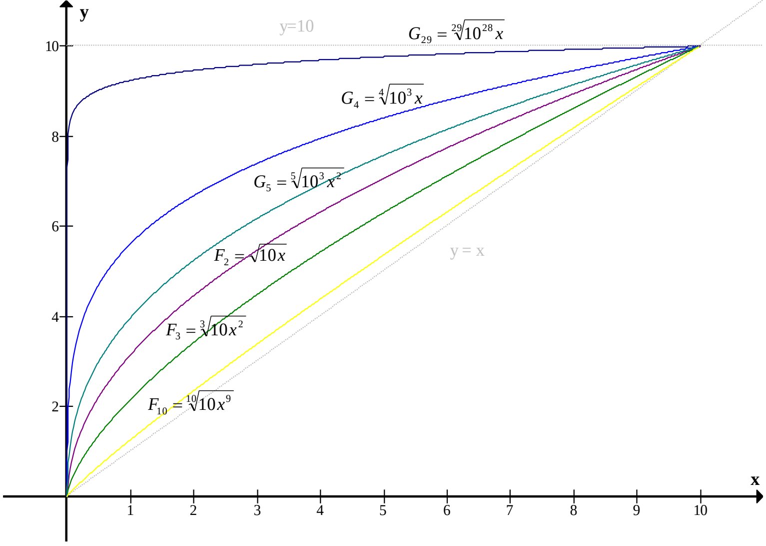
$$G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$$

Representaremos gráficamente algunos ejemplos:



Analizando la gráfica observamos que $y = \sqrt{10x}$ es la función que separa las funciones $F_n(x)$ y $G_n(x)$. Como ambas funciones coinciden cuando n toma el valor 2:

$$F_n(x) = \sqrt[n]{10x^{n-1}}\ ;\ F_2(x) = \sqrt[2]{10x^{2-1}} \quad \rangle\ F_2(x) = G_2(x) = \sqrt{10x}$$



$$G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1}x}\,;\; G_2(x) = \sqrt[2]{10^{2-1}x}$$

Señalaremos que las funciones de la forma $G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1}x}$ se encuentran por encima de la $F_2(x) = G_2(x)$. Además cuanto mayor sea el índice de la raíz, más alejada estará la función de $y = \sqrt{10x}$. Por tanto, podemos decir que las funciones de la forma $G_n(x)$ suben más las notas que la función $y = \sqrt{10x}$, y efectivamente más que las funciones de la forma $F_n(x)$.

Fijemonos ahora en las funciones $F_n(x) = \sqrt[n]{10x^{n-1}}$. Nos percatamos que éstas están por debajo de la función $y = \sqrt{10x}$ y consecuentemente, suben menos las calificaciones. Sin embargo en estos casos no nos podemos olvidar de las características de la función $y = \sqrt{10x}$, que serán comunes a las funciones de ambos tipos.

Realizando una gráfica de las funciones que tengan los índices más altos, podemos observar hacia donde tiende la función:

Gracias a la aproximación que hemos hecho graficamente para funciones con n cada vez más grandes, vemos que estas funciones suben las notas. Por ello, calcularemos el límite cuando $n = +\infty$.

Para $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Nx^{n-1}} = \sqrt[\infty]{Nx^{\infty-1}} = \sqrt[\infty]{N}\cdot\sqrt[\infty]{x^{\infty}}\cdot\sqrt[\infty]{x^{-1}} = \sqrt[\infty]{N}\cdot\sqrt[\infty]{x^{\infty}}\cdot\sqrt[\infty]{x^{-1}}$$

$$= \sqrt[\infty]{N}\cdot x\cdot\sqrt[\infty]{\frac{1}{x}} = \sqrt[\infty]{N}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt[\infty]{x}} = N^{1/\infty}\cdot x\cdot\frac{1}{x^{1/\infty}} = x$$

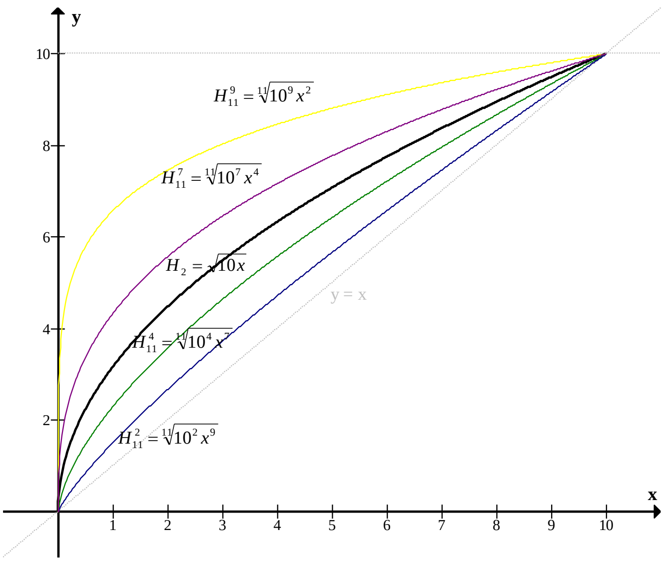
Para $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x} \qquad \lim_{n\to\infty} G_n \sqrt[n]{N^{n-1}x} \quad = \sqrt[\infty]{N^{\infty-1}x} \quad = \sqrt[\infty]{N^{\infty}} \cdot \sqrt[\infty]{N^{-1}} \cdot \sqrt[\infty]{x}$$

$$= N \cdot \sqrt[\infty]{\frac{1}{N}} \cdot \sqrt[\infty]{x} = N \cdot \frac{1}{\sqrt[\infty]{N}} \cdot \sqrt[\infty]{x} = \frac{N}{N^{1/\infty}} \cdot x^{1/\infty} = N$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x$, luego, las funciones $F_n(x)$ se acercan a $f(x) = x$.

Sin embargo, en el caso de $G_n(x)$ debemos tener en cuenta que la función ha de pasar por el origen. Según esto, $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$ siendo $G_n(x)\begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ N & si\ x \in [0,N] \end{cases}$

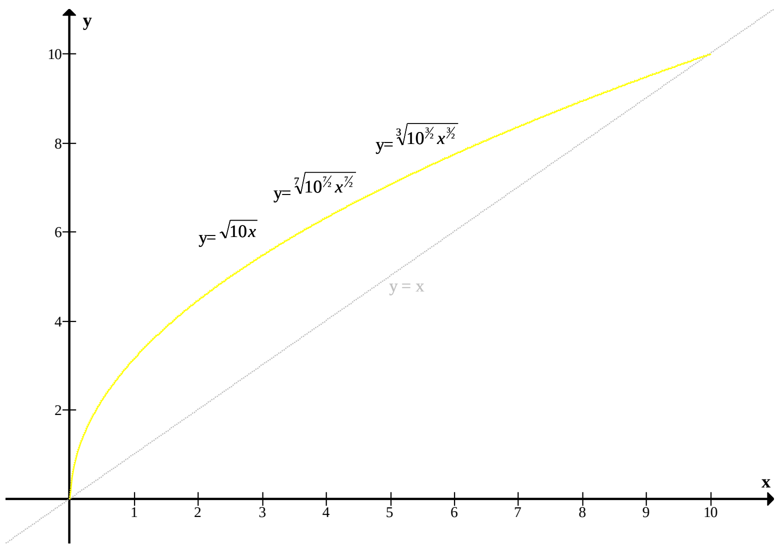


Anteriormente hemos definidos los tipos de funciones del modelo radical como: $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$ y $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$. Estos dos tipos de funciones son un caso específico de la expresión que engloba a todos los factores: $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m x^{n-m}}$

A continuación representaremos algunas funciones del tipo $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m x^{n-m}}$:

Así comprobamos que estos factores también se acomodan al enunciado de nuestro problema y por tanto, existirá una función que aglutine a los dos tipos de funciones previamente estudiados, $F_n(x)$ y $G_n(x)$. Además observamos que en las funciones representadas, cuanto mayor sea el exponente de N, más tenderá a subir las notas.

Pero, ¿Qué ocurrirá si a la incógnita y al coeficiente les acompaña el mismo exponente?



Estas funciones serán la misma que $y=\sqrt{10x}$. También se podría comprobar por las propiedades de las expresiones radicales, de manera que al simplificarlas quedaría la función anterior.

Después de haber estudiado las características de las funciones: $F_n(x)$ y $G_n(x)$, nos surgen nuevos interrogantes:

a) ¿Qué expresión tendrá el valor x, para que la imagen de éste sea $\dfrac{N}{2}$?

b) ¿Qué índice de la raíz, n, debemos tomar, para asegurarnos de que una nota x se transforma en $\dfrac{N}{2}$?

c)¿Qué n permite que una función nos convierta un valor a prefijado en el doble, es decir, en $2a$?

De las respuestas a las preguntas se infieren las siguientes conclusiones. En el apartado a) si comparamos las dos formulas: $F_n(x)\rightarrow x=\dfrac{1}{2^{n/(n-1)}}\cdot N$ y $G_n(x)\rightarrow x=\dfrac{N}{2^n}$ observamos que el valor para $G_n(x)$ es mayor que para $F_n(x)$, ya que $\dfrac{1}{2^{n/(n-1)}}\cdot N\rangle\dfrac{N}{2^n}$. Entonces, las funciones de la forma $F_n(x)$ aprueban notas más bajas que en el caso de las funciones de tipo

$G_n(x)$. Por ejemplo: cuando $N=10$ y $n=3$. Entonces: $F_n(x) \rightarrow \ x=\frac{1}{2^{3/3-1}}\cdot 10$;

$x=\frac{10}{2^{3/2}}$

$G_n(x) \rightarrow x=\frac{10}{2^3}$;

Es decir, si $n=3$, la función $F_n(x)$ toma el valor 5 cuando $x=\frac{10}{2^{3/2}}$, y la función $G_n(x)$ toma este valor cuando $x=\frac{10}{2^3}$. Por tanto, el valor $x=\frac{10}{2^{3/2}}$, que es el más pequeño, alcanza la misma imagen que el valor $x=\frac{10}{2^3}$, que es más elevado. Consecuentemente se cumple lo dicho anteriormente.

Para el apartado b) hemos encontrado un índice que transforma una nota x en $\frac{N}{2}$.

Comparando los resultados:

$$F_n(x) \rightarrow n=ln\left[\left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{1}{ln(2)}}\right] \quad \text{y} \quad G_n(x)=ln\left[\left(\frac{N}{x}\right)^{1/ln\left(\frac{N}{x}\right)-ln 2}\right]$$

Si nos fijamos, el valor que debe tomar n para que x dé el valor $\frac{N}{2}$, es menor en el caso de $F_n(x)$. Cuanto menor sea el valor que tome n, menor será también el valor que tome x. Y por tanto, a igualdad de resultados, $\frac{N}{2}$, aquella función donde la variable x tome menores valores será la que apruebe las notas más bajas. Esto lo cumple la función $F_n(x)$. Llegamos así al mismo resultado que en el apartado a).

Además, a medida que n aumenta:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N}{2^{n/_{n-1}}} = \frac{N}{2}$; cuando n tiende a ∞, los valores de x que se transforman en $\frac{N}{2}$ por las funciones $F_n(x)$ se acercan a $\frac{N}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N}{2^n} = 0$; si n tiende a ∞, las funciones $G_n(x)$ tienden a llevar al valor $\frac{N}{2}$ a las notas cercanas de cero.

En el apartado c) hemos llegado a dos expresiones que responden a dicha pregunta. Sin embargo, ¿Cómo podemos hallar dicho valor a? Por ejemplo, tomamos la función $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$, cuando $N = 10$ y $n = 3$. Entonces : $G_n(a) = \sqrt[3]{10^2 a} = 2a$; operando llegamos a : $8a^3 - 100a = 0$. Y por tanto, las soluciones de la ecuación serán: $a = 0$ y $a = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$. La solución $a = 0$ no nos solucionará ningún problema ya que el doble de 0 es 0. Entonces, el único valor que puede tomar a para que se convierta en el doble en las condiciones establecidas, es decir, cuando $N = 10$ y $n = 3$, es $a = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Sustituyendo el valor de a en la fórmula obtenemos:

$$n = \frac{\ln(a) - \ln(N)}{\ln(2a) - \ln(N)} = n = \frac{\ln\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \ln(10)}{\ln\left(2\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \ln(10)} = 3$$

. Lo que nos sirve como comprobación de que lo hecho anteriormente está bien.

Para hallar una expresión general que nos dé el valor que tomará a, en las funciones de tipo $G_n(x)$, empezaremos por dar diferentes valores a n, donde $N = 10$.

Para $n = 2, a = 0, a = \frac{5}{2}$; $n = 3, a = 0, a = \frac{5}{\sqrt{2}}$; $n = 4, a = 0, a = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

Observamos que los valores que tomará a para diferentes valores de n, cumplen una relación. Según esto, para las funciones de tipo $G_n(x)$, $a = \frac{5}{\sqrt[n-1]{2}}$ que verifica que $G_n(a) = 5$. O dicho de una forma más general: $G_n(x)$, $a = \frac{N}{2^{n/n-1}}$ siendo $G_n(a) = \frac{N}{2}$.

Centrémonos ahora en las funciones del tipo de $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$. Vamos a hallar ahora a siendo $N = 10$ y para los distintos valores de n. Partimos de $F_n(a) = \sqrt[n]{10a^{n-1}} = 2a$

Para $n = 2$, $a = 0$, $a = \frac{5}{2}$

$n = 3, a = 0, a = \frac{5}{4}$

$n = 4, a = 0, a = \frac{5}{8}$

$n = 5, a = 0, a = \frac{5}{16}$

Análogamente al caso anterior, despreciaremos la solución $a = 0$ en todos los casos. Por tanto, en general, $a = \frac{5}{2^{n-1}}$ cuando $N = 10$. O de otra forma más generalizada: $a = \frac{N}{2^n}$.

4. El modelo logarítmico y Exponencial:

¨La fórmula general de una función logarítmica es: $y = \log_a x$. Las funciones que buscamos cumplen las siguientes condiciones: cuando $x = 0$ su imagen debe ser 0 y cuando $x = N$ la imagen debe ser N. Según esto, las funciones que buscamos son $y = b \cdot log_a(x+1)$

Donde $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(N) = N \end{cases}$

Sustituyendo la ecuación general, $y = b \cdot \log_a(x+1)$, por los valores previamente dichos obtenemos: $N = b \cdot log_a(N+1)$. Despejando b en la expresión anterior: $b = \dfrac{N}{\log_a(N+1)}$.

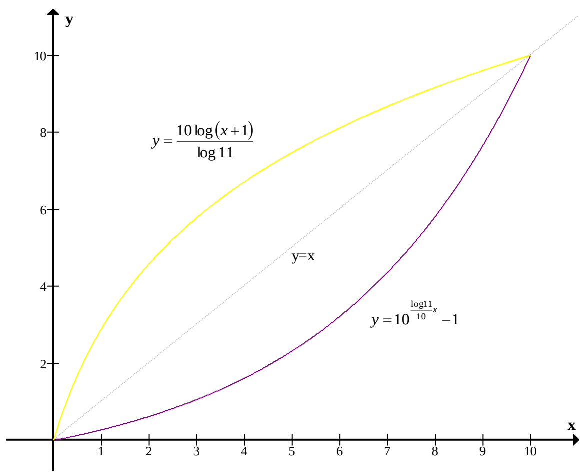
Luego, las funciones de la forma $y = \dfrac{N}{\log_a(N+1)} \cdot \log_a(x+1)$ sirven como modelo de corrección de notas. Ejemplo, cuando $a = 10$ y $N = 10$ obtenemos la función: $y = \dfrac{10\,log(x+1)}{log 11}$.

En cualquiera de las funciones de la forma $y = \dfrac{N}{log_a(N+1)} \cdot log_a(x+1)$, si despejamos la variable x y calculamos la recíproca obtenemos otra función que modifica la nota a la baja.

$$y \cdot log_a(N+1) = N \cdot log_a(x+1)\ ;\ \frac{y \cdot log_a(N+1)}{N} = log_a(x+1)$$

$$a^{y\frac{log_a(N+1)}{N}} = x+1\ ;\ x = a^{y\frac{log_a(N+1)}{N}} - 1;$$

Luego, la función recíproca será: $y = a^{x\frac{log_a(N+1)}{N}} - 1$. Esta función servirá para bajar las notas de manera simétrica a la logarítmica respecto de $y = x$.



A continuación analizaremos como varían las funciones si cambiamos el valor de la base a

Primeramente daremos valores a la base a siendo en todos los casos $N = 10$. Comenzaremos por $a = 3$. Si sustituimos en la ecuación general obtenemos:

$$y = \frac{10}{\log_3(10+1)} \cdot \log_3(x+1)$$

Aplicando logaritmos y operando:

$$y = \frac{10}{\frac{\log(10+1)}{\log 3}} \cdot \frac{\log(x+1)}{\log 3} \quad ; \quad y = \frac{10 \cdot \log 3}{\log(11)} \cdot \frac{\log(x+1)}{\log 3} \quad ;$$

$$y = \frac{10 \cdot \log(x+1)}{\log(11)}$$

Hemos llegado a una función que previamente ya habíamos representado. Si seguimos probando con valores de a , llegaremos a la misma función ya que la expresión se simplifica en todos estos casos. Por tanto, sólo hay una función logarítmica y una exponencial que sirva como modelo para resolver el problema inicial.

5. Algunos modelos trigonométricos:

A continuación aparece un modelo nuevo en el que se dan multitud de funciones con diferentes características: pueden subir las notas, pueden bajarlas o pueden subirlas y bajarlas a su antojo.

5.1. Modeos que suben las notas

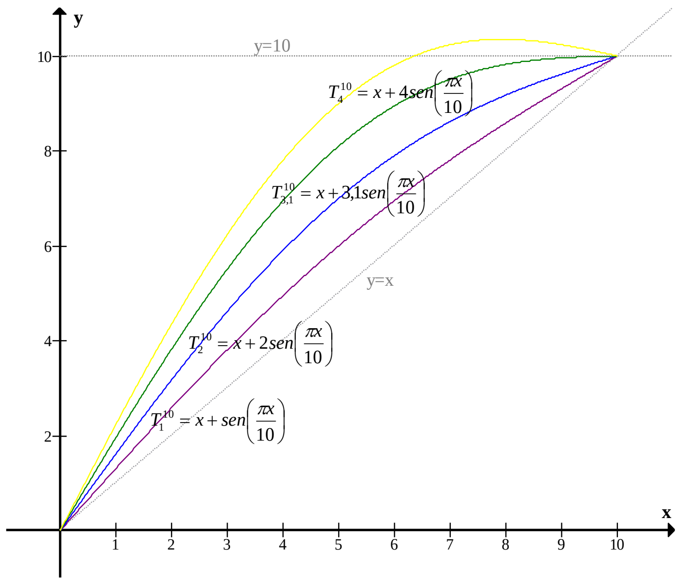
En este modelo intervienen las siguientes funciones:

- $T_p^N(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$

- $T_a^b(x) = a \cdot sen\left(\frac{x}{b \cdot \pi}\right)$

- $S_p^n(x) = x + p - p\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$

Comenzaremos analizando la función: . $T_p^N = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$ Vamos a representarla cuando $N = 10$. En este caso, la función $T_p^{10} = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ será: .



Graficamente observamos que para cada valor de p habrá diferentes funciones. Además para ciertos valores, la función no se ajusta a las pautas del enunciado.

A continuación calcularemos aproximadamente entre que valores estará el máximo valor que puede tomar p. Primero hallaremos el máximo para la función general, $T_p^N(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$, cuando $N = 10$.

$$T_p^{10}(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{10}\right)$$

$$y' = 1 + p \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) \cdot \frac{\pi}{10}$$

$$y' = 1 + p \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) \cdot \frac{\pi}{10} = 0$$

Despejando x en la función: $1 + p \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) \cdot \frac{\pi}{10} = 0$:

$$cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) = \frac{-1}{\frac{\pi \cdot p}{10}} \quad ; \quad cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) = \frac{-10}{\pi \cdot p} \quad ; \quad \frac{\pi \cdot x}{10} = arc\,cos\left(\frac{-10}{\pi \cdot p}\right) \quad ;$$

$$x = \frac{10}{\pi} \cdot arc\,cos\left(\frac{-10}{\pi \cdot p}\right)$$

Luego, la función tiene un máximo en $x = \frac{10}{\pi} \cdot arc\cos\left(\frac{-10}{\pi \cdot p}\right)$. A continuación despejamos p. Para simplificar los cálculos, trabajaremos con: $\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{10}\right) = \frac{-1}{\frac{\pi \cdot p}{10}}$. En este caso, $\frac{\pi \cdot p}{10} \in [-1,1]$. Consecuentemente: $\frac{\pi \cdot p}{10} \geq 1$ ó $\frac{\pi \cdot p}{10} \leq -1$. Operamos estas expresiones:

- $\frac{\pi \cdot p}{10} \geq 1 \quad ; \quad \pi \cdot p \geq 10 \; ; \; p \geq \frac{10}{\pi}$

- $\frac{\pi \cdot p}{10} \leq -1$; $\pi \cdot p \leq -10$; $p \leq \frac{-10}{\pi}$

Por consiguiente, los valores que deberá tomar p son: $p \in \left[\frac{-10}{\pi}, \frac{10}{\pi}\right]$.

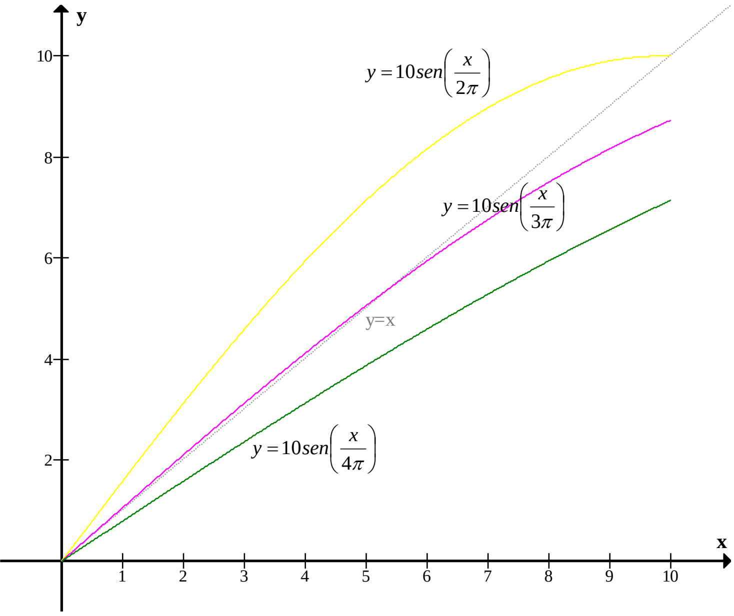
Los valores máximos de la función T_p^{10} vienen dados por la función:

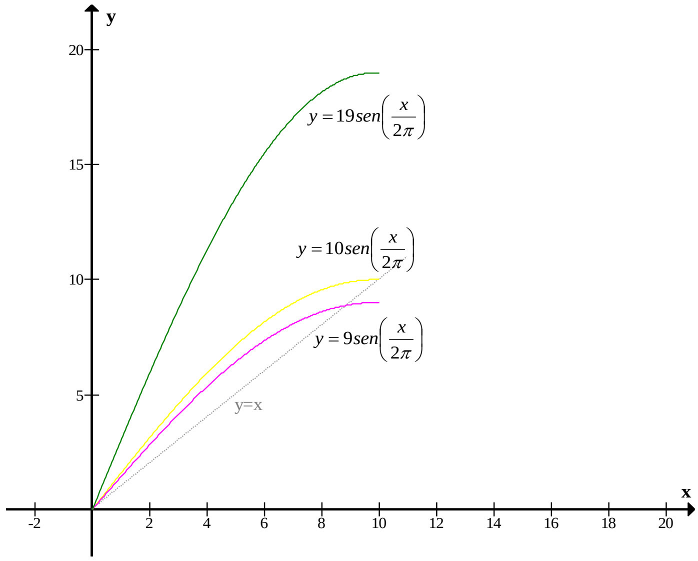
$$M(x) = \frac{10}{\pi} \cdot arc\cos\left(\frac{-10}{\pi \cdot x}\right) + x \cdot sen\left(arc\cos\left(\frac{-10}{\pi x}\right)\right)$$

Esta función se saca sustituyendo los valores necesarios en la función T_p^{10}. Además mencionaremos que para cada valor de p, hay un valor máximo de T_p^{10}. Por ejemplo, en la gráfica representamos: $p = 3{,}1844 \rightarrow M(3{,}1844) \approx 10$. Sin embargo, para $p \rangle 3{,}1844$ $\rightarrow M(3{,}1844) \rangle 10$. Por tanto sólo nos sirve la función $T_p^{10}(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ cuando $p = \frac{10}{\pi}$. Los demás valores de p no nos interesan porque no se ajustan a las condiciones del problema.

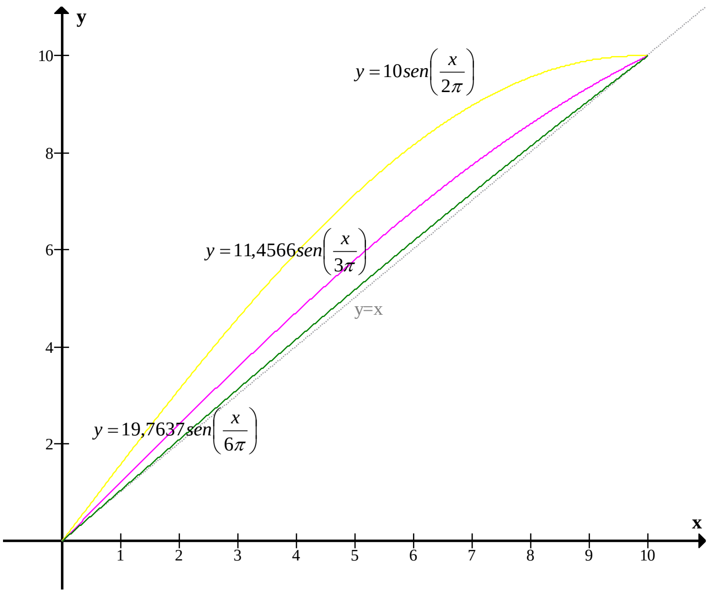
A continuación estudiaremos las funciones: $T_a^b(x) = a \cdot sen\left(\frac{x}{b \cdot \pi}\right)$. En éstas, los parámetros a y b son dependientes el uno del otro ya que no podemos dar valores arbitrariamente a los dos parámetros. Además debemos variar ambos al mismo tiempo, ya sea aumentando o disminuyendo su valor. En caso contrario, las funciones no se adecuarían a las condiciones de nuestro problema: $\left.\begin{array}{l} T_a^b(0) = 0 \\ T_a^b(10) = 10 \end{array}\right\}$.

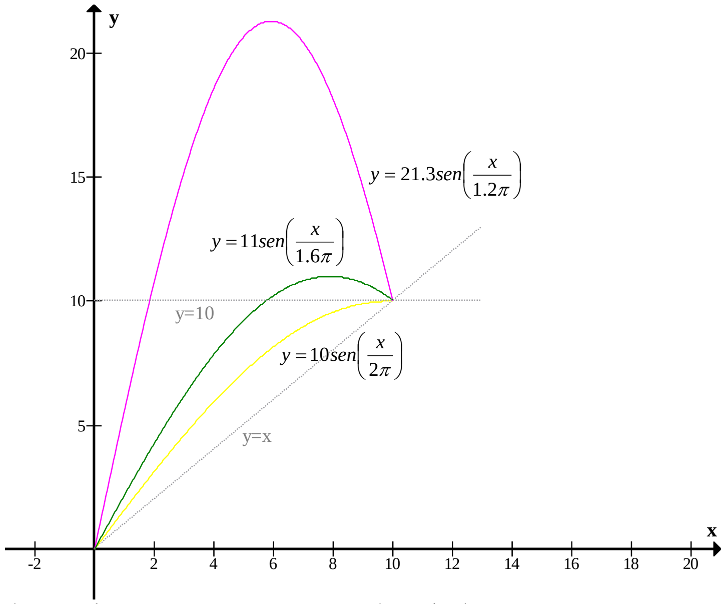
Representamos algunos ejemplos:





Graficamente observamos que sólo njos servirán las funciones del último gráfico, el resto sin embargo, no cumple las condiciones del problema previamente establecidas. Observamos en el





último ejemplo que cuanto menores sean los valores de a , menores serán los de b y viceversa. No obstante, para ciertos valores de los parámetros se obtienen funciones que no se ajustan a las condiciones del problema.

A continuación calcularemos cuanto deben valer a y b para que la función obtenida concuerde con las condiciones del problema. Partimos de la función general: $T_a^b(x) = a \cdot sen\left(\frac{x}{b \cdot \pi}\right)$.

En ella se debe cumplir lo siguiente:

$$T_a^b(0)=0$$

$$T_a^b(N)=a\cdot sen\left(\frac{N}{b\cdot\pi}\right)=N$$

Operando la segunda ecuación obtenemos: $sen\left(\frac{N}{b\cdot\pi}\right)=\frac{N}{a}$, $arcsen\left(\frac{N}{a}\right)=\frac{N}{b\cdot\pi}$.

Como $arcsen\left(\frac{N}{a}\right)\in[-1,1]$, sacamos que: $\frac{N}{a}\geq 1$ ó $\frac{N}{a}\leq -1$. Es decir, $N\geq a$ ó $N\leq -a$. Así, hemos calculado dos valores, uno máximo y otro mínimo, para los que la función tiene sentido. Sin embargo, deberemos hallar también el valor de b. En este caso analizaremos la situación cuando $a=N$.

Primeramente despejaremos en la función general el valor de b : $b=\frac{N}{\pi\cdot arcsen\left(\frac{N}{a}\right)}$. Como previamente hemos dicho que $a=N$, sustituiremos este valor en la expresión y operaremos: $b=\frac{N}{\pi\cdot arcsen(1)}$; $b=\frac{N}{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}$; $b=\frac{2\cdot N}{\pi^2}$. Una vez hallados a y b, los sustituiremos en la expresión general para obtener un tipo de funciones que más sube las notas, especialmente a las altas:

$$T_a^b(x)=N\cdot sen\left(\frac{x}{\frac{2\cdot N}{\pi^2}\cdot\pi}\right)$$

Operando: $T_a^b(x)=N\cdot sen\left(\frac{\pi\cdot x}{2\cdot N}\right)$. En el caso en el que $a\rangle N$, también podremos encontrar una expresión general de este tipo de funciones. Análogamente partimos de la función general en la que sustituiremos los valores correspondientes: $T_a^b(x)=a\cdot sen\left(\frac{x}{b\cdot\pi}\right)$.

$$T_a^b(x) = a \cdot sen\left(\frac{\dfrac{x}{N}}{\dfrac{N}{\pi \cdot arc\ sen\left(\dfrac{N}{a}\right)} \cdot \pi} \right)$$

Operando:

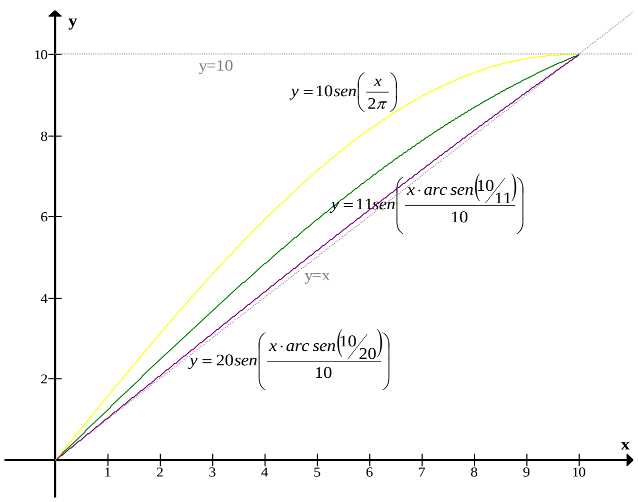
$$T_a^b(x) = a \cdot sen\left(\frac{x \cdot arc\ sen\left(\dfrac{N}{a}\right)}{N} \right)$$

No habrá otras funciones posibles, ya que a simplemente puede ser $a \geq N$. Pongamos algunos ejemplos de los dos tipos de funciones posibles. Por ejemplo, siendo $N = 10$:

Cuando $a = 10 \rightarrow T_a^b(x) = 10 \cdot sen\left(\dfrac{\pi \cdot x}{2 \cdot 10}\right)$; $T_a^b(x) = 10 \cdot sen\left(\dfrac{\pi \cdot x}{20}\right)$

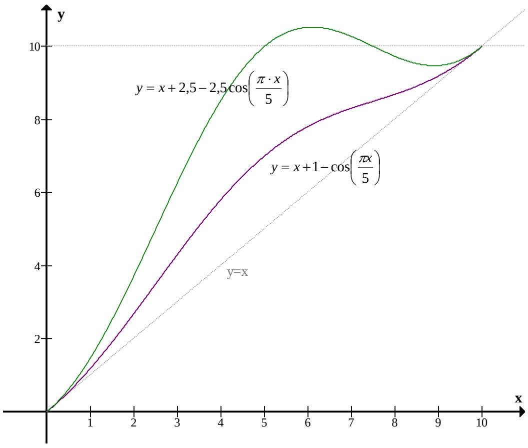
$$a \rangle 10;\ a = 11 \rightarrow T_a^b(x) = 11 \cdot sen\left(\frac{x \cdot arc\ sen\left(\dfrac{10}{11}\right)}{10} \right)$$

Gráficamente:



El último tipo de funciones que suben las notas es: $S_p^n(x) = x + p - p\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$.

Tomando $n = 2$ y $N = 10$ obtenemos las siguientes funciones: $S_p^2(x) = x + p - p\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right)$. Representaremos varios ejemplos:



Observamos que el valor p tomará un valor máximo N. A continuación calcularemos p:

$$S_p^2(x) = x + p - p\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right)$$

$$\left(S_p^2\right)'(x) = 1 + p \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) \cdot \frac{\pi}{5}$$

Igualamos a 0:

$$\left(S_p^2\right)'(x) = 0 \rightarrow 1 + p \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) \cdot \frac{\pi}{5} = 0$$

Operamos:

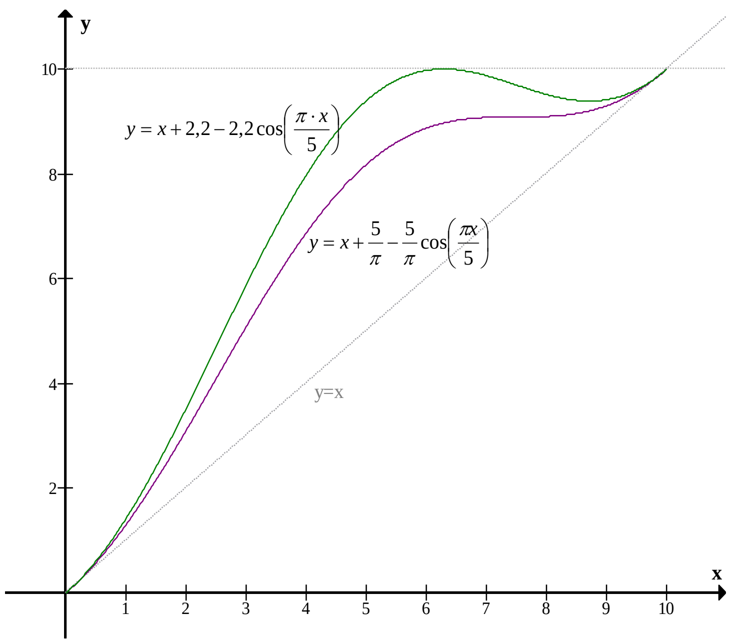
$$\frac{p \cdot \pi}{5} \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) = -1 \quad ; \quad sen\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) = \frac{-5}{p \cdot \pi} \;\; ; \;\; \frac{\pi \cdot x}{5} = arc\,sen\left(\frac{-5}{p \cdot \pi}\right) \;\; ;$$

$$x = \frac{5}{\pi} arc\,sen\left(\frac{-5}{p \cdot \pi}\right)$$

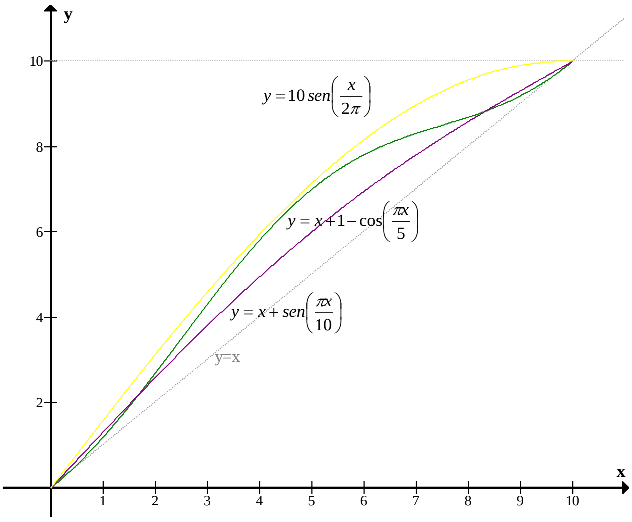
Para que esta expresión cobre sentido, $\frac{-5}{p\cdot\pi}\geq -1$ ó $\frac{-5}{p\cdot\pi}\leq 1$,es decir, $p\geq\frac{5}{\pi}$ ó $p\leq\frac{-5}{\pi}$.

Cuando $p=\frac{5}{\pi}$, entonces obtenemos la función toma el valor: $x=\frac{5}{\pi}arc\,sen\left(\frac{-5}{\frac{5}{\pi}\cdot\pi}\right)$; $x=\frac{5}{\pi}arc\,sen(-1)$; $x=\frac{5}{\pi}\cdot\frac{3\cdot\pi}{2}$; $x=\frac{15}{2}$. Cuando $p\rangle\frac{5}{\pi}$, obtenemos un máximo en los valores más pequeños $x\left\langle\frac{15}{2}\right.$, pero en alguno puede salirse de $y=10$.

Si nos ayudamos del gráfico obtenemos que cuando $p\approx 2{,}2$, se tiene un máximo en $x=6{,}3386$ y entonces, $S_p^2(6{,}3386)\approx 10$. Finalmente obtenemos que p debe estar entre los valores: $p\in\left[\frac{5}{\pi}, 6.3386\right]$. Representado quedaría:



Como dijimos en la introducción, esta función sube todas las notas. Sin embargo, la forma de hacerlo es un tanto peculiar: aumenta más las calificaciones del centro que las de los extremos. Además observamos que la función sube lo mismo la nota cuando x toma los correspondientes valores.



A continuación, compararemos las funciones previamente estudiadas. Para ello representaremos un ejemplo de cada tipo de función:

Consecuentemente observamos que la función $y = a \cdot sen\left(\frac{x}{b \cdot \pi}\right)$ sube más las notas que cualquiera de las otras dos. En cuanto a las funciones:

$y = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$ y $y = x + 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$ diremos que mientras que la función $y = x + 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$ sube más las notas del medio, ésta también es la que sube menos las notas de los extremos.

Otra diferencia que podemos notar es que todas ellas tienden a subir poco a las notas bajas extremas. Cosa que no sucede para las notas extremas altas.

5.2 Modelos que bajan las notas

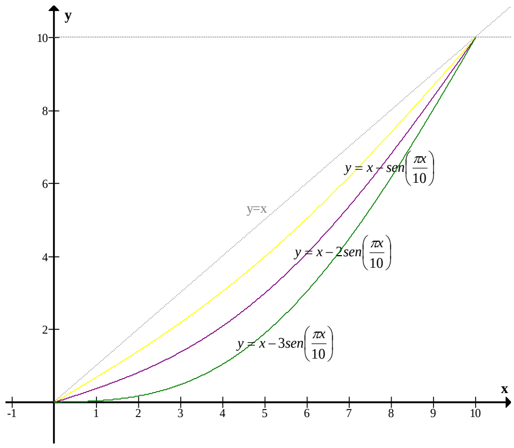
Aestos modelos vienen representados por las siguientes funciones:

- $T_p^N(x) = x - p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$

- $T_a^b = a\left(1 - \cos\left(\frac{x}{b\pi}\right)\right)$

- $S_p^n = x - 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$

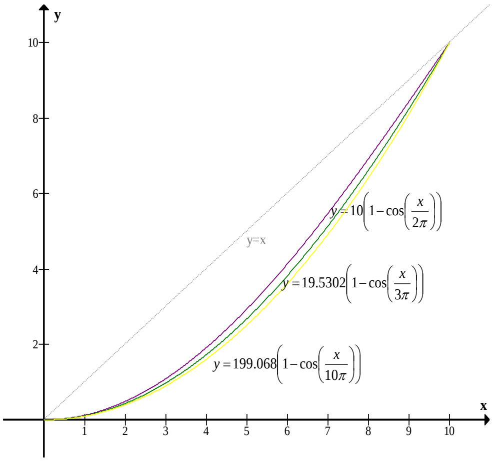
Comenzaremos estudiando las funciones del tipo: $T_p^N = x - p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$. La representaremos cuando $N = 10$, que será: $T_p^{10} = x - p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{10}\right)$.



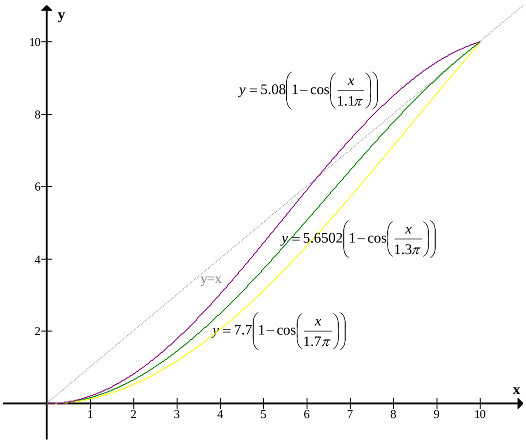
Graficamente observamos que los diferentes valores de p influirán en las funciones siendo los requeridos para nuestro ejemplo los mismos que cuando estudiamos la función recíproca.

Otro tipo de funciones son : $T_a^b = a\left(1 - cos\left(\frac{x}{b\pi}\right)\right)$.

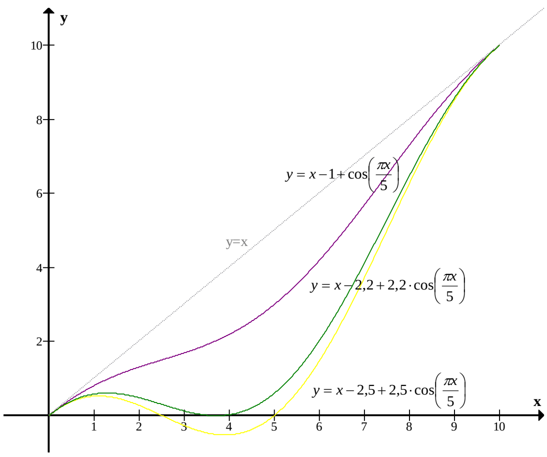
En este caso cuanto mayor sean a y b más cercanas estarán las funciones al eje de abscisas. Sin embargo estos valores deberán tomar unos valores enormemente grandes ya que esta función varía muy poco. El estudio de esta función será similar al de la citada previamente. Sólo cabe destacar que en este caso el resultado no es el mismo y $b \leq N$, lo cual se puede apreciar perfectamente en la gráfica anterior: bajará más a las notas más bajas.



No obstante hay que tener en cuenta que al poner ciertos ejemplos encontramos otro tipo de funciones que suben unas calificaciones y bajan otras. Por ejemplo:



Finalizaremos este apartado estudiando las funciones de la forma : $S_p^n = x - p + p \cdot cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$.



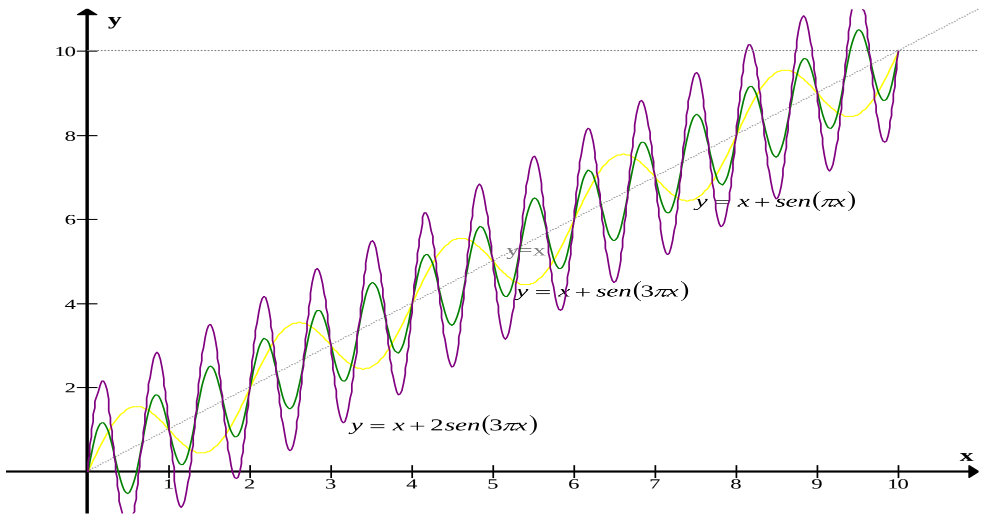
Su estudio se resume en lo antes dicho sobre su función recíproca: $S_n^p = x + p - p \cdot cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$. Además, en este caso, bajará más las notas del medio y menos aquellas que se encuentran próximas a los extremos.

5.3. Modelos que suben y bajan las notas

Estos modelos vienen dados por la función:

$$G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$$

En primer lugar, analizaremos como influyen los parámetros en la gráfica de la función. Como se puede observar, p influirá en el valor que alcancen los extremos de la función y la relación $\frac{n}{N}$ en el número de extremos que haya. De esta manera si $\frac{n}{N}\rangle 1$ la función tendrá mayor número de extremos que si $\frac{n}{N} = 1$, y tendrá menos cuando $\frac{n}{N}\langle 1$.



Sin embargo, aunque para las funciones $G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$ $n \in \mathcal{N}$ se cumplen las normas: $G_p^n(0) = 0; G_p^n(N) = N$; cuando p toma ciertos valores, el máximo de la función sobrepasa el valor N. A continuación hallaremos para qué valores de p no ocurre eso.

Partimos de: $G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$.

$$\left(G_p^n\right)'(x) = 1 + p\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{N}\right)\cdot \frac{n\cdot\pi}{N}$$

$$\left(G_p^n\right)'(x) = 0\,;\ \left(G_p^N\right)'(x) = 1 + p\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{N}\right)\cdot \frac{n\cdot\pi}{N} = 0\,;$$

$$\frac{n\cdot\pi\cdot p}{N}\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{N}\right)\cdot = -1 \qquad ; \qquad \cos\left(\frac{n\pi x}{N}\right)\cdot = \frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p} \qquad ;$$

$$\frac{n\pi x}{N} = \arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right); \qquad x = \frac{N}{n\pi}\cdot \arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)$$

Como el coseno de un ángulo puede valer como máximo 1:

$$\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p} \le 1\ ;\ \frac{-N}{n\cdot\pi} \le p\ \ ;\ \frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p} \ge -1\ ;\ \frac{-N}{n\cdot\pi} \ge -p\,;\ \frac{N}{n\cdot\pi} \le p$$

Pero, ¿Cuánto debe valer p para que el máximo no valga más de diez? Sustituiremos la expresión $x = \frac{N}{n\pi}\cdot \arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)$ y el valor de p en la ecuación de la función. De modo que obtenemos:

$$G_p^n(x) = x + p\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{\pi}\cdot\frac{\cancel{N}}{\cancel{n}\cancel{\pi}}\cdot \arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)}{\cancel{N}}\right)$$

$$G_p^n(x) = x + p\cdot \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)\right)$$

Sustituyendo: $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)\right)$ por otra más sencilla, simplificaremos los cálculos. $\alpha = \arccos\left(\frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}\right)$; $\cos\alpha = \frac{-N}{n\cdot\pi\cdot p}$. Utilizando razones trigonométricas obtenemos: $sen\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{N^2}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2}}$; $sen\alpha = \sqrt{\dfrac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2}}$;

$sen\alpha = \dfrac{1}{n \cdot \pi \cdot p} \cdot \sqrt{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2}$.

Volviendo a la ecuación de la función:

$G_p^n(x) = \dfrac{N}{n\pi} \cdot arc\cos\left(\dfrac{-N}{n \cdot \pi \cdot p}\right) + p \cdot \dfrac{1}{n \cdot \pi \cdot p} \cdot \sqrt{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2}$. Este valor deberá ser mayor o igual que diez. Según esto obtenemos:

$$x + \cancel{p} \cdot \frac{1}{n \cdot \pi \cdot \cancel{p}} \cdot \sqrt{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2} \le 10 \quad ;$$

$$\frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \sqrt{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2} \le 10 - x \, ; \quad \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2}{n^2 \cdot \pi^2} \le (10 - x)^2 \quad ;$$

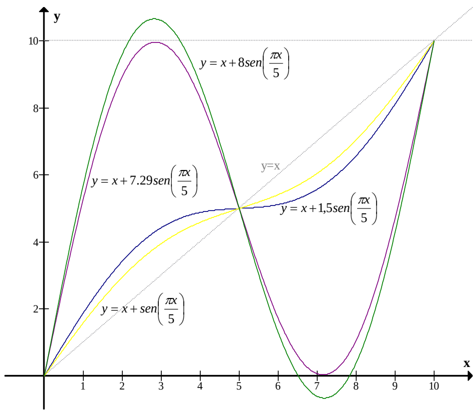
$$n^2 \cdot \pi^2 \cdot p^2 - N^2 \le n^2 \cdot \pi^2 (10 - x)^2 ; \qquad p^2 \le \frac{n^2 \cdot \pi^2 (10 - x)^2 + N^2}{n^2 \cdot \pi^2} \quad ;$$

$$p \le \frac{\sqrt{n^2 \cdot \pi^2 (10 - x)^2 + N^2}}{n \cdot \pi} .$$

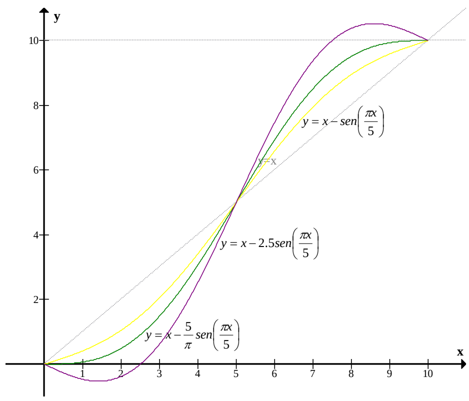
Corroboremos el resultado con un ejemplo. Analizaremos la función $G_p^n(x)$ cuando $n = 2$ y $N = 10$. Entonces, la función será: $G_p^2(x) = x + p \cdot sen\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$. Entonces, $\dfrac{5}{\pi} \le p$ y $\dfrac{-5}{\pi} \le p$. Sustituyendo los valores correspondientes en la expresión $x = \dfrac{N}{n\pi} \cdot arc\cos\left(\dfrac{-N}{n \cdot \pi \cdot p}\right)$ obtendremos un valor de x en cual hay un punto de inflexión. Es decir, $x = \dfrac{5}{\pi} \cdot arc\cos(-1)$.Finalmente obtendremos los posibles valores de x:

$$x_0 = \frac{5}{\pi} \cdot \pi \to x_0 = 5 \; ; \; x_1 = \frac{5}{\pi} \cdot 3\pi \to x_1 = 15$$

Para calcular p, utilizamos la expresión $p \leq \frac{\sqrt{n^2 \cdot \pi^2 (10-x)^2 + N^2}}{n \cdot \pi}$. Si sustituimos por los valores correspondientes, donde x es la abcisa del máximo $x = 2{,}88$, obtenemos que $p \leq 7{,}29$. Consecuentemente, las funciones con $p \rangle 7{,}33$ no valdrán, éstas tomarán valores mayores que 10. Gráficamente lo observamos:



Además también debemos destacar que como hemos dicho al principio existirían funciones donde p sea negativo. En este caso las funciones serán del siguiente modo:



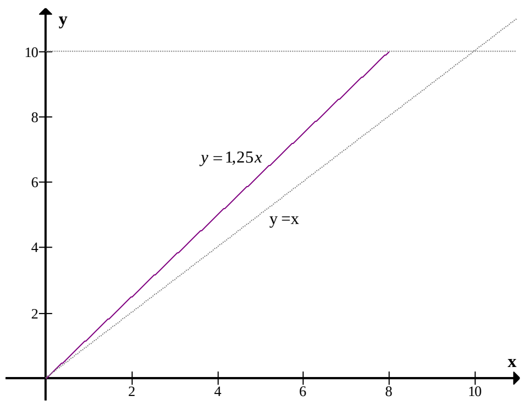
Por último, las funciones de la forma $G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$ se pueden dividir al mismo tiempo en dos tipos: aquellas donde $p \rangle 0$ y en las que $p \langle 0$. Éstas se diferencian principalmente en que mientras que, aquellas con p positiva subirán las notas suspensas y bajarán las aprobadas; en las que p es negativo, bajarán las notas suspensas y aumentarán los aprobados. Además en todo momento habrá notas que se mantendrán constantes: eso le ocurre al 5 en nuestro ejemplo.

6. Modelos que mejoran los resultados

Finalmente existirá la posibilidad de ajustar las calificaciones obtenidas por la clase al sistema de correción ordinario, es decir, al sistema cuya nota máxima es 10. Dicho de otra forma, trasformaremos la nota más alta de la clase en 10 y, a partir de ésta calificación el resto de notas serán proporcionales a ella.

Imaginemos que las calificaciones han sido las siguientes: 3; 6,5; 8. Según lo expuesto anteriormente, el 8 es la calificación máxima de la clase y, de este modo, se convertirá en un 10. Así, el 3 se cambiará a un 3,75 y el 6,5 en 8,125. Estos valores se han calculado de una forma sencilla aplicando la regla de tres simple directa. Sin embargo, ¿cual es la función que nos da la relación entre las dos calificaciones?

Teniendo en cuenta que la función debe ser proporcional directa sabemos que debe ser de la forma: $y = mx$. Donde y es la nota final, m la pendiente de la recta y x la calificación inicial. La pendiente de la recta la obtendremos si sustituimos las incógnitas por los valores que dimos en el ejemplo. Según esto obtenemos que la función sea $y = 1{,}25x$.



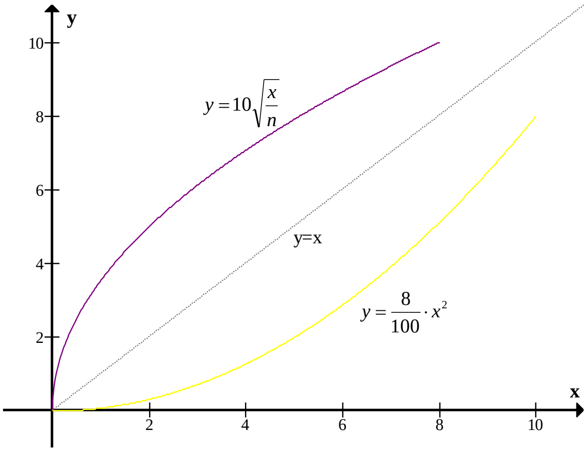
Sin embargo, si lo que queremos es dar una función de forma que la nota máxima sea N la función quedará de la siguiente forma: $y = \frac{N}{n}x$. Donde N es la calificación máxima y n la nota máxima de la clase.

A continuación, sobre dicha función, se podrán aplicar los modelos que hemos estudiado en los apartados anteriores. Esto se llevará a cabo gracias a la composición de funciones.

Imaginemos por ejemplo que trabajamos con las funciones $f(x)=\frac{N}{n}x$ y $g(x)=\sqrt{Nx}$.

Entonces obtendremos la función: $g(f(x))=\sqrt{N\cdot\frac{Nx}{n}}=N\sqrt{\frac{x}{n}}$. Desarrollemos el ejemplo anterior, es decir cuando $n=8$ y $N=10$. Entonces $g(f(x))=10\sqrt{\frac{x}{8}}$ donde $x\in[0,8]$

Podremos obtener otra función si por ejemplo, calculamos la recíproca: $g(f(x))^{-1}=\frac{8}{100}\cdot x^2$. Finalmente las representaremos gráficamente.



7. Conclusiones

Haciendo una breve reflexión sobre el trabajo; me sirvió para desarrollar aptitudes a nivel individual del área de las matemáticas, es decir, me enseñó a enfrentarme a un problema de la vida real para buscar una respuesta matemática acorde a todo lo estipulado. Finalmente, he desarrollado una forma de pensar diferente a lo que acostumbraba ya que, aunque sabía el punto de partida e intuía los resultados finales, desconocía como llegar hasta ellos y que métodos utilizar. En este impulso realice un trabajo que englobó la investigación y la reflexión y como no el consejo del profesor Constantino de la Fuente Martínez.

Sin embargo este tema es espinoso en algunas ocasiones en las que la complejidad de la realidad nos impide seguir adelante, esto hace desarrollar el ingenio para proponernos nuevos objetivos e interrogantes; hecho que ocurre siempre que se pretende aplicar las asentadas bases teóricas de las Matemáticas a la complicada e imprevisible realidad.

8. Bibliografía

- Azcárate Giménez, Carmen, *Funciones y gráficas*, Madrid: Síntesis 1990

- Vizmanos J. R. y Anzola M., *Algoritmo 2*, Ediciones Sm Madrid

- *The language of functions and graph/ Shell Centre for Matematical Education, Joint Matriculation Board;* Traducción y adaptación de Félix Ayalo, Madrid: Ministerio de Educación y ciencia, centro de publicaciones; Bilbao , Servicio Editorial, Universidad del País Vasco

- *Revista UNO* nº 44

ANEXO 6

DOCUMENTO RPA-TG

GENERALIZACIÓN N-DIMENSIONAL
DE LAS PROGRESIONES NUMÉRICAS

"Una de las características de las matemáticas es que
la invención empieza muy pronto,
desde que un alumno se sitúa ante un problema que debe resolver (...).
Si el alumno no se limita a contestar a las preguntas que se le formulan,
sino que se esfuerza en hacer observaciones
originales relativas al problema, o mejor aún,
si él mismo se plantea problemas,
en estos casos su trabajo se distingue
del del matemático creador sólo en una
diferencia de nivel".
René Taton:
"Causalidad y accidentalidad
de los descubrimientos científicos"

"Pocos placeres hay en la vida humana que igualen al producido por
la aparición repentina de una generalización repentina
que ilumina el entendimiento.
Quien haya experimentado una vez
este placer de creación científica,
no lo olvida jamás"
Piotr A. Kropotkin:
"*Memorias de un revolucionario"*

Las matemáticas son un producto de las mentes humanas
pero no pueden someterse a la voluntad humana.
Explorarlas es como explorar un nuevo sendero en el terreno;
quizá no sabes lo que hay en la siguiente curva del río,
pero no tienes que escoger. Sólo puedes esperar y descubrirlo.
Pero el terreno matemático no existe hasta que uno lo explora.
Ian Stewart:
"Cartas a una joven matemática"

Índice Pág.

1 – INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El presente trabajo intenta profundizar en el estudio de las series numéricas que siguen un patrón fijo, centrándose fundamentalmente en las progresiones aritméticas y geométricas. La investigación parte, como en numerosas ocasiones, de un problema inicial previamente planteado.

En nuestro caso hemos partido de dos problemas similares, uno de ellos planteado en la fase nacional de la Olimpiada Matemática Española de 2009 y otro planteado y resuelto previamente por Priscila Ramos Ibeas en su trabajo "*Progresiones Aritméticas en el Plano. Una generalización del concepto de progresión*" realizado en 2004 y publicado en la página web de la Universidad de Burgos (puede consultarse en el Anexo II). Tras resolver estos problemas fueron apareciendo distintas líneas de investigación.

Por tratarse éste, de un trabajo en grupo, hemos repartido nuestros esfuerzos en las diferentes propiedades y características de las progresiones. Dichas propiedades son:

- Término general de una progresión *RAND* en cualquier dimensión $\left(a_{p_1,p_2,\ldots,p_n}\right)$ siendo $1 \le p_1 \le d_1; \quad 1 \le p_2 \le d_2; \quad \ldots; \quad 1 \le p_n \le d_n$

- Cálculo de una progresión aritmética en n dimensiones. Dados ciertos valores pertenecientes a una red numérica, averiguar si existe o no una *RAND* a los que pertenecen esos valores.

- Suma de los $d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n$ primeros términos de una progresión *RAND* en cualquier dimensión.

- Interpolación de medios aritméticos en progresiones aritméticas en cualquier dimensión.

- Interpretación geométrica de estas progresiones (para el caso bidimensional).

Este trabajo desarrolla y resuelve algunos de los problemas abiertos previamente por Priscila Ramos Ibeas, y además profundiza en el estudio de las progresiones aritméticas n-dimensionales ampliando así el trabajo de Priscila en este tema.

Con este trabajo se ha tratado también de entrar en el mundo de las progresiones geométricas n-dimensionales. Se han estudiado las analogías que existen entre este tipo de progresiones y las aritméticas, abriendo así un campo que no había sido estudiado previamente.

Se han utilizado, así mismo, conceptos descubiertos por Priscila Ramos Ibeas en su trabajo y, se han descubierto algunos nuevos a raíz del estudio de las progresiones geométricas n-dimensionales: término general, varias fórmulas para la suma de los términos, fórmulas para la interpolación de medios aritméticos o geométricos. Dichos conceptos son importantes porque consiguen generalizar la idea de progresión aritmética, así como la idea de progresión geométrica, a más de una dimensión.

Para terminar, se dejan algunos problemas abiertos, que no han podido estudiarse en el trabajo por falta de tiempo o por la extrema dificultad que suponían, pero con los cuales aún seguimos trabajando.

1.1 - Punto de Partida

Uno de los problemas con los que empieza esta aventura matemática es el siguiente:

¿Será posible rellenar los espacios vacíos del cuadrado (Fig. 1) con enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

	74			
				186
		103		
0				

Fig. 1

Para resolver este problema lo que vamos a hacer es escribir el valor de determinadas celdas del cuadro en función de las diferencias de cada fila y cada columna. De esta forma conseguiremos determinar los valores de dichas diferencias y con ellas, podremos rellenar todas las celdas del cuadro.

	x	r			p
q	(2)	74			(4)
					186
	(1)	(3)	103		(5)
n	0	(7)			(6)
y					

Fig. 2

$$\left.\begin{array}{l}(1): x = 103 - 2n \\ (2): 3x = 74 - q\end{array}\right\}\text{eliminamos la } x$$

$(3): x + n = 103 - n$ (es lo mismo que la (1))

$$\left.\begin{array}{l}(4): 74 + 3q = 186 + p \\ (5): 103 + 2n = 186 - p\end{array}\right\}\text{sumamos } x$$

$(6): 186 - 2p = 4y$

$(7): 74 - 3r = y$

De (1) y (2) obtenemos: $3\cdot(103 - 2n) = 74 - q$; operando queda: $309 - 6n = 74 - q$, o también:

$$\left.\begin{array}{l}235 - 6n = -q \\ 177 + 3q + 2n = 372\end{array}\right\}\text{sustituimos } q \text{ en la ecuación que se infiere de (4) y (5)}$$

$3(6n - 235) + 2n = 195$

$18n - 705 + 2n = 195$

$20n = 900 \rightarrow n = 45$

A partir de n, obtenemos todos los valores de las diferencias que hemos considerado representativas: $x = 13$; $p = -7$; $y = 50$; $q = 35$; $r = 8$.

Por tanto, partiendo de estas diferencias podemos calcular todos los valores del cuadro.

52	82	112	142	172

39	74	109	144	179
26	66	103	146	186
13	58	103	148	193
0	50	100	150	200

Fig. 3

Lo que Priscila Ramos descubrió en su trabajo fue que en estos cuadros denominados *RA2D* (redes aritméticas en dimensión 2), las respectivas diferencias de las filas y columnas siguen a su vez progresiones aritméticas que tienen la misma diferencia, dicha diferencia fue bautizada por ella misma como Número de Priscila. En nuestro trabajo nos referiremos a dicho número continuamente, pero nosotros lo llamaremos Diferencia de Priscila, dado su carácter de diferencia.

30	52	82	112	142	172
35	39	74	109	144	179
40	26	66	106	146	186
45	13	58	103	148	193
50	0	50	100	150	200
-5	13	8	3	-2	-7

Aquí podemos ver la Diferencia de Priscila del cuadro ejemplo. En rojo aparecen las diferencias verticales y horizontales, y en verde aparece la Diferencia de Priscila.

También hay otro problema que nos ha permitido abordar otros temas relacionados con la suma de los términos de una red aritmética, el cual se expone a continuación.

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Para resolver este problema lo que vamos a hacer es suponer un cuadro rectangular con las condiciones arriba indicadas de dimensiones $(n \times m)$ y, vamos a sumar sus elementos fila a fila. Llamaremos n al número de filas y m al número de columnas.

$$\begin{pmatrix} a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \end{pmatrix}$$

A partir de aquí, sumando fila por fila obtenemos:

$$S_1 = \frac{a_{1,1} + a_{1,m}}{2} \cdot m$$

$$S_2 = \frac{a_{2,1} + a_{2,m}}{2} \cdot m$$

$$S_n = \frac{a_{n,1} + a_{n,m}}{2} \cdot m$$

Si ahora sumamos todas las filas juntas obtenemos:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{m}{2} \cdot \left[\left(a_{1,1} + a_{2,1} + \ldots + a_{n,1} \right) + \left(a_{1,m} + a_{2,m} + \ldots + a_{n,m} \right) \right] = \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left(a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m} \right)$$

La fórmula que hemos obtenido expresa la suma de todos los elementos del cuadro en función de los términos de sus esquinas. Por lo tanto, para resolver el problema que nos ocupa.

$$a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m} = \frac{4S}{n \cdot m} = \frac{4 \cdot 110721}{221} = 2004$$

2 – Objetivos y metodología

2.1 - Objetivos

Antes de iniciar la investigación de las series numéricas en diversas dimensiones, vamos a enumerar los objetivos del trabajo que nos hemos propuesto llevar a cabo, es decir, vamos a plantearnos las metas que pretendemos alcanzar en esta investigación. Dichos objetivos son:

Practicar y conocer a fondo el método de investigación de las matemáticas. Dicho método es el responsable de que las matemáticas no sean una disciplina estancada en los problemas ya resueltos, sino que mantenga intacto ese entusiasmo por abrir caminos en terrenos totalmente inexplorados y desconocidos.

Profundizar y afianzar los conocimientos que previamente hemos estudiado en el aula. Desde que empezamos la educación primaria, puede que incluso antes, hemos estado aprendiendo fórmulas de toda índole y teoremas a cada cual más incomprensible, pero es ahora, cuando estamos a punto de acabar el bachillerato, cuando empezamos a atisbar lo que son en realidad las matemáticas, sus innumerables aplicaciones y su modo exacto y racional de conocer la realidad.

También nos proponemos la generalización de conceptos tales como “progresión aritmética” o “suma” a más de una dimensión, para así comprender mejor su naturaleza. Esta generalización implica la obtención de nuevas fórmulas y de nuevas teorías para estos conceptos.

El último objetivo, pero no por ello el menos importante, es practicar el trabajo en grupo el cual nos enseñará a compenetrarnos mejor entre nosotros y a aportar cada uno lo mejor de nosotros mismos para conseguir así la resolución de los problemas propuestos.

2.2 – Metodología

El marco teórico de la metodología utilizada, en el sentido etimológico como “camino para llegar a...” se centra, esencialmente en los siguientes documentos:

- El modelo de Miguel de Guzmán de resolución de problemas en grupo, descrito principalmente en “*Para pensar mejor*”(M. de Guzmán, 1991), y otras ideas del mismo autor (M de Guzmán, 2003)
- Algunas de las conclusiones de Camino Cañón contenidas en su libro *“La Matemática, creación y descubrimiento”* (C. Cañón, 1993)
- El capítulo de D. R. Hofstadter del libro *“Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea”*(D. R. Hofstadter, B. Mandelbrot y otros, 1990).
- Algunas ideas contenidas en el libro de René Taton “*Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos*” (R. Taton, 1967).

En cuanto a la dinámica del trabajo, hay que resaltar que, como es lógico, cada uno de los componentes del grupo nos hemos esforzado al máximo para colaborar en las tareas a resolver:

- Planteamiento de problemas afines, contenidos en los problemas principales.
- Búsqueda de estrategias adecuadas para su resolución, puesta en común y acuerdos del grupo sobre ellas.
- Puesta en práctica de las estrategias o contraste de las conjeturas, en la búsqueda de la veracidad de los resultados o en el proceso de construcción de las demostraciones.
- Aceptación de las ideas argumentadas de otros compañeros a la hora de elegir una notación y simbología adecuadas.
- Recopilación de resultados, trabajo de escritura en el ordenador, revisión y corrección de errores de escritura.

3 – RESULTADOS

En este apartado vamos a dar por conocidos los conceptos de red aritmética bidimensional (RA2D), los conceptos análogos de RA3D y RAND, así como el concepto de Diferencia de Priscila de una red aritmética (pueden consultarse en uno de los Anexos del trabajo, que contiene el trabajo previo relacionado con el tema). También presentamos en formato electrónico (disco CD) un póster en el que podemos contemplar un ejemplo motivador del trabajo, un resumen de los principales resultados y fórmulas, así como algunas imágenes relacionadas con el significado geométrico de algunas de las ideas mostradas en el trabajo.

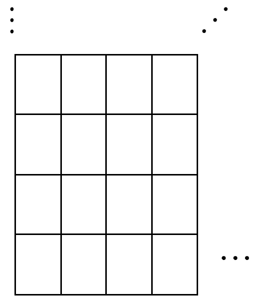
A continuación se presentan los resultados de todas las averiguaciones realizadas acerca de las progresiones aritméticas en cualquier dimensión y de las progresiones geométricas.

3.1 - Término General de Redes Aritméticas

Una de las primeras metas que nos planteamos era la posibilidad de encontrar la expresión, si es que existía, del término general de una RAND, para cualquier valor de N, que abarcara la expresión conocida de las progresiones aritméticas tradicionales. De todo ello hemos encontrado varias expresiones o posibilidades, en función de los datos que conozcamos inicialmente.

3.1.1 - Término General de una $RA2D$

Las $RA2D$ (Red Aritmética bidimensional) que planteó Priscila en su trabajo *Progresiones aritméticas en el plano. Una generalización del concepto de progresión* consisten en una serie de números dispuestos en una red $(n\times m)$, de forma que las filas y columnas formen progresiones aritméticas (p. a.):



(Los puntos suspensivos indican que el cuadro de números podría prolongarse indefinidamente)

Los números de cada fila y columna forman progresiones aritméticas, por eso podemos considerar el cuadro como ilimitado $(i\times j)$, siendo $a_{i,j}$ cada término situado en las coordenadas i, j. En primer lugar vamos a demostrar el siguiente resultado, que da una expresión del término general:

Teorema

En una $RA2D$ se cumple que $a_{i,j}=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot(j-1)+a_{1,1}$ siendo $a_{1,1}$ el término en las coordenadas (1,1), h_1 la diferencia de la progresión aritmética de la primera fila, v_1 la diferencia de la progresión aritmética de la primera columna, d_P la Diferencia de Priscila y i, j la fila y columna en la que está situado el término buscado (o término general).

Para demostrarlo, utilizaremos la expresión del término general de una p. a. Teniendo en cuenta lo dicho antes, que hi es la diferencia de las p. a. de la fila i, y que vi es la diferencia de la p. a. correspondiente a la columna i, tenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}a_{i,1}=h_1\cdot(i-1)+a_{1,1}\\ a_{i,j}=v_i\cdot(j-1)+a_{i,1}\end{cases}\rightarrow a_{i,j}=\left[h_1\cdot(i-1)+a_{1,1}\right]+v_i\cdot(j-1)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_i=d_P\cdot(i-1)+v_1\end{array}\right\}\rightarrow a_{i,j}=\left[h_1\cdot(i-1)+a_{1,1}\right]+\left[d_P\cdot(i-1)+v_1\right]\cdot(j-1)$$

$$a_{i,j}=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot(j-1)+a_{1,1}$$

Como podemos observar:

- Dados los valores de $a_{1,1}$, h_1, v_1 y d_P,podemos obtener cualquier elemento de la $RA2D$, situado en unas coordenadas cualesquiera. Y recíprocamente,

- Dados cuatro valores a, b, c, d, situados en unas coordenadas dadas arbitrarias, tales como $a(a_1,a_2);b(b_1,b_2);c(c_1,c_2);d(d_1,d_2)$, podemos intentar averiguar si existe una $RA2D$ a la esos valores pertenezcan, y completarla. Este problema es el que vamos a abordar a continuación.

En una $RA2D$ se tiene que:

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\iddots$

$a_{1,1}+3v_1$	$a_{1,1}+h_1+3v_1+3d_P$	$a_{1,1}+2h_1+3v_1+6d_P$	$a_{1,1}+3h_1+3v_1+9d_P$
$a_{1,1}+2v_1$	$a_{1,1}+h_1+2v_1+2d_P$	$a_{1,1}+2h_1+2v_1+4d_P$	$a_{1,1}+3h_1+2v_1+6d_P$
$a_{1,1}+v_1$	$a_{1,1}+h_1+v_1+d_P$	$a_{1,1}+2h_1+v_1+2d_P$	$a_{1,1}+3h_1+v_1+3d_P$
$a_{1,1}$	$a_{1,1}+h_1$	$a_{1,1}+2h_1$	$a_{1,1}+3h_1$

$\cdots$

Así que, con los datos dados en el problema nos planteamos la pregunta: ¿Es posible completar una Red Aritmética dados cuatro términos? Veamos: es posible establecer un sistema de ecuaciones o su equivalente ecuación matricial:

$$\begin{cases} a = d_p\cdot(a_1-1)\cdot(a_2-1)+h_1\cdot(a_1-1)+v_1\cdot(a_2-1)+a_{1,1} \\ b = d_p\cdot(b_1-1)\cdot(b_2-1)+h_1\cdot(b_1-1)+v_1\cdot(b_2-1)+a_{1,1} \\ c = d_p\cdot(c_1-1)\cdot(c_2-1)+h_1\cdot(c_1-1)+v_1\cdot(c_2-1)+a_{1,1} \\ d = d_p\cdot(d_1-1)\cdot(d_2-1)+h_1\cdot(d_1-1)+v_1\cdot(d_2-1)+a_{1,1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (a_1-1)\cdot(a_2-1) & (a_1-1) & (a_2-1) & 1 \\ (b_1-1)\cdot(b_2-1) & (b_1-1) & (b_2-1) & 1 \\ (c_1-1)\cdot(c_2-1) & (c_1-1) & (c_2-1) & 1 \\ (d_1-1)\cdot(d_2-1) & (d_1-1) & (d_2-1) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_P \\ h_1 \\ v_1 \\ a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Cuando el determinante de la primera matriz se anule, podemos decir que el sistema no es compatible determinado, con lo que quedaría resuelto el problema propuesto y no resuelto por Priscila en su trabajo. La expresión de este determinante es:

$$\det(A)=(a_1-1)\cdot(a_2-1)\cdot\left[(c_1-b_1)\cdot(d_2-b_2)-(d_1-b_1)\cdot(c_2-b_2)\right]-(b_1-1)\cdot(b_2-1)\cdot\left[(c_1-a_1)\cdot(d_2-a_2)-(d_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)\right]+$$
$$+(c_1-1)\cdot(c_2-1)\cdot\left[(b_1-a_1)\cdot(d_2-a_2)-(d_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\right]-(d_1-1)\cdot(d_2-1)\cdot\left[(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(c_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\right]$$

Por lo que cuando:

$$(a_1-1)\cdot(a_2-1)\cdot\left[(c_1-b_1)\cdot(d_2-b_2)-(d_1-b_1)\cdot(c_2-b_2)\right]+(c_1-1)\cdot(c_2-1)\cdot\left[(b_1-a_1)\cdot(d_2-a_2)-(d_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\right]=$$
$$=(b_1-1)\cdot(b_2-1)\cdot\left[(c_1-a_1)\cdot(d_2-a_2)-(d_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)\right]+(d_1-1)\cdot(d_2-1)\cdot\left[(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(c_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\right]$$

entonces la $RA2D$ no tendrá solución única, o puede que sencillamente no la tenga.

El programa Microsoft Office Excel facilita mucho el cálculo de este determinante. Además hemos creado una combinación de fórmulas con las cuales introduciendo cuatro valores situados en sus respectivas coordenadas, el programa nos devuelve las cuatro incógnitas que nos definen la $RA2D$, si es que tiene solución.

Volviendo al punto de partida, nos planteamos la posibilidad de que, al tener el término general de una $RA2D$ 4 sumandos, se pudiera también obtener como producto de dos términos generales de progresiones aritméticas tradicionales, una de ellas horizontal y la otra vertical:

$$a_{i,j}=\left[d_1\cdot(i-1)+a_1\right]\cdot\left[d_2\cdot(j-1)+b_1\right]=d_1d_2\cdot(i-1)\cdot(j-1)+d_1b_1\cdot(i-1)+a_1d_2\cdot(j-1)+a_1b_1$$

Igualando esta expresión al término general se puede establecer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} d_1 d_2 = d_P \\ d_1 b_1 = h_1 \\ a_1 d_2 = v_1 \\ a_1 b_1 = a_{1,1} \end{cases} \rightarrow d_P \cdot a_{1,1} = h_1 \cdot v_1 \text{ (expresión que se obtiene de operar en las ecuaciones)}$$

No obstante, si esto ocurriese, con tan sólo 3 valores podríamos obtener el cuarto simplemente despejándolo, lo que es imposible. Para resolver este inconveniente es necesario añadir una constante a la expresión de la siguiente manera:

$$a_{i,j} = \left[d_1 \cdot (i-1) + a_1\right] \cdot \left[d_2 \cdot (j-1) + b_1\right] + p$$

por lo que p, que se obtiene al desarrollar e igualar en la expresión obtenida en el primer teorema vendría dado por la expresión $d_P \cdot \left(a_{1,1} - p\right) = h_1 \cdot v_1$.

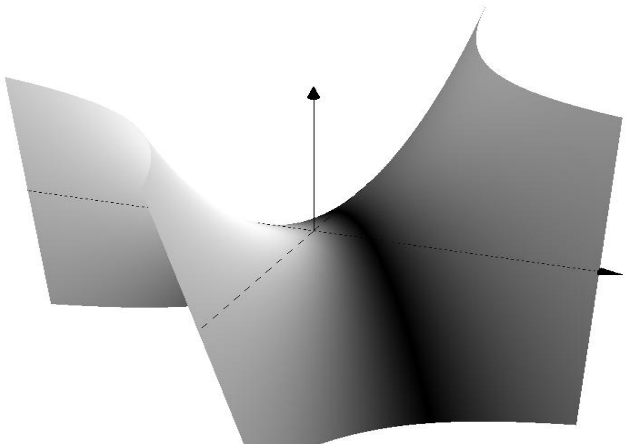
Con estas averiguaciones obtenemos unos resultado muy interesantes que nos permiten conectar los aspectos algebraicos y aritméticos de las redes aritméticas con aspectos geométricos contenidos en ellas:

Teorema

El número *p* tiene un significado geométrico. Representa la componente *z* del punto "puerto" de la "silla de montar" o paraboloide hiperbólico definido por el término general de una Red Aritmética Bidimensional, considerando los valores de las variables i, j continuas en vez de discretas como son en las $RA2D$.

Vamos a demostrarlo: despejamos *p* de la ecuación que lo define:

$$d_P \cdot \left(a_{1,1} - p\right) = h_1 \cdot v_1;\ p = a_{1,1} - \frac{h_1 \cdot v_1}{d_P}$$



Como podemos observar en la representación gráfica (página siguiente), el puerto de la superficie está situado en el lugar donde las diferencias horizontales y verticales se anulen. Las diferencias horizontales se hacen 0 cuando $j-1=\frac{-h_1}{d_p}$ y las diferencias verticales se hacen 0 cuando $i-1=\frac{-v_1}{d_p}$. Así que calculamos el valor del elemento de la $RA2D$ donde se nos cumplen ambas condiciones:

$$a_{\frac{-v_1}{d_P},\frac{-h_1}{d_P}} = d_P \cdot \left(\frac{-v_1}{d_P}\right) \cdot \left(\frac{-h_1}{d_P}\right) + h_1 \cdot \left(\frac{-v_1}{d_P}\right) + v_1 \cdot \left(\frac{-h_1}{d_P}\right) + a_{1,1} =$$

$$= \frac{v_1 \cdot h_1}{d_P} - \frac{v_1 \cdot h_1}{d_P} - \frac{v_1 \cdot h_1}{d_P} + a_{1,1} = a_{1,1} - \frac{v_1 \cdot h_1}{d_P} = p \quad QED$$

Vamos a dar una interpretación gráfica de las expresiones anteriores. Así como de una progresión aritmética tradicional podemos unir los puntos generados por la misma por una recta de pendiente d, en las $RA2D$ podemos unir los puntos generados por la siguiente superficie suponiendo que:

$(i-1)=x; (j-1)=y; a_{i,j}=z$;

Por tanto $z=d_p x\cdot y+h_1 x+v_1 y+a_{11}$

Como podemos ver, la superficie representada en la página siguiente es una "silla de montar" o paraboloide hiperbólico, que sabemos que está compuesta por infinitas rectas en su superficie, es decir, es una superficie reglada. Al igual que nuestra $RA2D$, que también lo está, pero de progresiones aritméticas (que con variables continuas, podríamos interpretar como recta).

El puerto al que antes hacíamos referencia, en el caso representado coincide con el punto (0,0,0).

A partir de las propiedades de esta superficie podemos deducir algunas de las $RA2D$:

- Si cortamos a la "silla de montar" con un plano horizontal ($z=k$) obtenemos una hipérbola. Trasladándola a nuestro caso:

$$a_{i,j}=k=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot(j-1)+a_{1,1}$$
$$k=(j-1)\cdot\left[d_P\cdot(i-1)+v_1\right]+h_1\cdot(i-1)+a_{1,1}$$
$$-(j-1)\cdot\left[d_P\cdot(i-1)+v_1\right]=h_1\cdot(i-1)+a_{1,1}-k$$
$$(j-1)=\frac{k-a_{1,1}-h_1\cdot(i-1)}{d_P\cdot(i-1)+v_1}$$

Cambiando a variables continuas:

$$y=\frac{k-a_{1,1}-h_1\cdot x}{d_P\cdot x+v_1}$$

Si encontrásemos un valor de x para el que y fuese entero, entonces $a_{x+1,y+1}=k$. Al ser una hipérbola, por cada par de números (x,y) encontraríamos otro para el que también aparece el valor de k.

Teorema:

En una $RA2D$, con $i,j\in\mathbb{N}$, dado un valor A de coordenadas (A_1,A_2) existen al menos otro par de coordenadas para las que la $RA2D$ también toma el valor A.

Así que, todo número entero ($n\in\mathbb{Z}$) aparece en una $RA2D$ de parámetros enteros $\{d_P,h_1,v_1,a_{1,1}\}\in\mathbb{Z}$ un número par de veces (0 incluido).

Si cortamos a la "silla de montar" con un plano vertical $y=c\cdot x$ obtenemos una parábola:

$$\begin{cases} a_{i,j}=d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot(j-1)+a_{1,1} \\ (j-1)=c\cdot(i-1) \end{cases}\rightarrow$$
$$\rightarrow a_{i,j}=d_P\cdot c\cdot(i-1)^2+h_1\cdot(i-1)+v_1\cdot c\cdot(i-1)+a_{1,1}$$

Según la suposición anterior (considerar variables continuas):

$$z = d_P \cdot c \cdot x^2 + \left(h_1 + v_1 \cdot c\right) \cdot x + a_{1,1}$$

Que nos da la expresión de la susodicha parábola.

Si $d_P = 0$, la $RA2D$ gráficamente tendría la forma de un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, que en nuestro caso sería:

$$h_1 \cdot x + v_1 \cdot y - z + a_{1,1} = 0$$

Para este caso, $d_P = 0$, no existen dos progresiones aritméticas tradicionales que al multiplicarlas nos originen una $RA2D$, pero sí podemos encontrar dos que nos la originen al sumarlas. Esto es una nueva posibilidad, añadida a la anterior, para la expresión del término general de algunas $RA2D$ particulares, ya que en ese caso la expresión queda como sigue: $a_{i,j} = h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$, y esto puede ser el resultado de sumar dos p. a. Escogidas adecuadamente.

3.1.2 Término General de una $RA3D$

Haciendo un razonamiento análogo al realizado en dos dimensiones, es decir, partiendo del término general de progresiones aritméticas lineales, a bidimensionales y finalmente a tridimensionales, demostración análoga a dos dimensiones, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{i,j,k} &= d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) \cdot (k-1) + d_{i,j,1} \cdot (i-1) \cdot (j-1) + d_{i,1,k} \cdot (i-1) \cdot (k-1) + d_{1,j,k} \cdot (j-1) \cdot (k-1) + \\ &+ d_{i,1,1} \cdot (i-1) + d_{1,j,1} \cdot (j-1) + d_{1,1,k} \cdot (k-1) + a_{1,1,1} \end{aligned}$$

Siendo $d_{i,j,1}, d_{i,1,k}, d_{1,j,k}$ las Diferencias de Priscila de las caras del Prisma Aritmético y $d_{i,1,1}, d_{1,j,1}, d_{1,1,k}$ las de las aristas del prisma anterior. d_P es la Diferencia de Priscila de esa $RA3D$ y $a_{1,1,1}$ el primer término.

El prisma resultante donde irían localizados los términos de la sucesión quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & a_{1,1,1} + d_{1,j,1} + d_{1,1,k} + d_{1,j,k} & \leftarrow & - & & \rightarrow a_{1,1,1} + d_{i,1,1} + d_{1,j,1} + d_{1,1,k} + d_{i,j,1} + d_{i,1,k} + d_{1,j,k} + d_P \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
a_{1,1,1} + d_{1,j,1} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{1,1,1} + d_{i,1,1} + d_{1,j,1} + d_{i,j,1} & & | \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
| & & a_{1,1,1} + d_{1,1,k} & \leftarrow & + & & \rightarrow a_{1,1,1} + d_{i,1,1} + d_{1,1,k} + d_{i,1,k} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
a_{1,1,1} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{1,1,1} + d_{i,1,1} & &
\end{array}$$

Por tanto, dados los valores de los ocho parámetros $a_{1,1,1}, d_{i,1,1}, d_{1,j,1}, d_{1,1,k}, d_{i,j,1}, d_{i,1,k}, d_{1,j,k}, d_P$, podemos determinar cualquier elemento de la $RA3D$ sin más que sustituir en la fórmula.

Por otra parte, recíprocamente, dados ocho elementos arbitrarios de una posible $RA3D$, podemos plantearnos el problema de si existirá o no la $RA3D$ que los contiene. Para ello podríamos establecer un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas fuesen $a_{1,1,1}, d_{i,1,1}, d_{1,j,1}, d_{1,1,k}, d_{i,j,1}, d_{i,1,k}, d_{1,j,k}, d_P$ y sus elementos las coordenadas multiplicadas entre sí de la misma forma que el término general. La matriz del sistema se encuentra más abajo. El añadir un número a las 3 progresiones aritméticas que hemos puesto al empezar este apartado no resuelve el problema de dependencia interna de las incógnitas antes comentado. Por lo tanto al estudiar las redes aritméticas n-dimensionales no podremos generalizar el método que hemos utilizado para deducir el término general.

$$\begin{pmatrix} (a_1-1)\cdot(a_2-1)\cdot(a_3-1) & (a_1-1)\cdot(a_2-1) & (a_1-1)\cdot(a_3-1) & (a_2-1)\cdot(a_3-1) & (a_1-1) & (a_2-1) & (a_3-1) & 1 \\ (b_1-1)\cdot(b_2-1)\cdot(b_3-1) & (b_1-1)\cdot(b_2-1) & (b_1-1)\cdot(b_3-1) & (b_2-1)\cdot(b_3-1) & (b_1-1) & (b_2-1) & (b_3-1) & 1 \\ (c_1-1)\cdot(c_2-1)\cdot(c_3-1) & (c_1-1)\cdot(c_2-1) & (c_1-1)\cdot(c_3-1) & (c_2-1)\cdot(c_3-1) & (c_1-1) & (c_2-1) & (c_3-1) & 1 \\ (d_1-1)\cdot(d_2-1)\cdot(d_3-1) & (d_1-1)\cdot(d_2-1) & (d_1-1)\cdot(d_3-1) & (d_2-1)\cdot(d_3-1) & (d_1-1) & (d_2-1) & (d_3-1) & 1 \\ (e_1-1)\cdot(e_2-1)\cdot(e_3-1) & (e_1-1)\cdot(e_2-1) & (e_1-1)\cdot(e_3-1) & (e_2-1)\cdot(e_3-1) & (e_1-1) & (e_2-1) & (e_3-1) & 1 \\ (f_1-1)\cdot(f_2-1)\cdot(f_3-1) & (f_1-1)\cdot(f_2-1) & (f_1-1)\cdot(f_3-1) & (f_2-1)\cdot(f_3-1) & (f_1-1) & (f_2-1) & (f_3-1) & 1 \\ (g_1-1)\cdot(g_2-1)\cdot(g_3-1) & (g_1-1)\cdot(g_2-1) & (g_1-1)\cdot(g_3-1) & (g_2-1)\cdot(g_3-1) & (g_1-1) & (g_2-1) & (g_3-1) & 1 \\ (h_1-1)\cdot(h_2-1)\cdot(h_3-1) & (h_1-1)\cdot(h_2-1) & (h_1-1)\cdot(h_3-1) & (h_2-1)\cdot(h_3-1) & (h_1-1) & (h_2-1) & (h_3-1) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_P \\ d_{i,1,1} \\ d_{1,j,1} \\ d_{1,1,k} \\ d_{i,j,1} \\ d_{i,1,k} \\ d_{1,j,k} \\ a_{1,1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

3.1.3 - Término General de una $RAND$

Llamaremos $a_{p_1,p_2,\dots,p_n}$ al término situado en las coordenadas $p_1, p_2, \dots, p_n$. Existen n coordenadas ya que estamos en n dimensiones. Después de bastante trabajo, sobre todo por problemas de notación, podemos afirmar que el valor del término general de una *RAND* en función de sus coordenadas tiene la siguiente forma:

$$a_{p_1,p_2,\dots,p_n} = d_P \cdot \prod_{i=1}^{n}(p_i - 1) + \sum_{j=2}^{2^n-1}\left(b_j \cdot a_j\right) + a_{1,1,\dots,1}$$

En esta expresión, d_p es la Diferencia de Priscila de la $RAND$, n el número de dimensiones, b_j las Diferencias de Priscila en dimensiones inferiores, $RA(n-1)D, RA(n-2)D, \dots,$ $a_{1,1,\dots,1}$ el primer término y cada a_j se corresponde con cada uno de los sumandos obtenidos al desarrollar:

$$\prod_{i=1}^{n}\left[(p_i-1)+1\right]$$

Teniendo en cuenta que $p_i - 1$ no se puede efectuar con el 1 sumado, ya que el primero es una coordenada y el segundo no.

Por ejemplo, para el caso bidimensional, el término general sería:

$$a_{p_1,p_2} = d_P \cdot \prod_{i=1}^{2}(p_i - 1) + \sum_{j=2}^{2^2-1}\left(b_j \cdot a_j\right) + a_{1,1}$$

Quedando así la Diferencia de Priscila multiplicada por todos los números de cada coordenada. Luego tenemos el sumatorio de los términos intermedios en los que cada incógnita va multiplicada por una serie de coordenadas, y por último nos aparece el primer término.

Efectuamos:

$$a_{p_1,p_2} = d_P \cdot \prod_{i=1}^{2}(p_i - 1) + \sum_{j=2}^{2^2-1}(b_j \cdot a_j) + a_{1,1}$$

$$a_{p_1,p_2,p_3} = d_P \cdot (p_1 - 1)\cdot(p_2 - 1) + (b_2 \cdot a_2) + (b_3 \cdot a_3) + a_{1,1}$$

$$\prod_{i=1}^{2}\left[(p_i - 1) + 1\right] = \left[(p_1 - 1) + 1\right]\cdot\left[(p_2 - 1) + 1\right] = \underbrace{(p_1 - 1)\cdot(p_2 - 1)}_{a_1} + \underbrace{(p_1 - 1)}_{a_2} + \underbrace{(p_2 - 1)}_{a_3} + \underset{a_4}{1} = \sum_{j=1}^{2^2} a_j$$

Con lo que queda confirmada la validez y generalidad de la fórmula obtenida.

3.2 - Término General de Redes Geométricas

Llegados a este punto nos planteamos la posibilidad de que, al igual que existen analogías de una a dos, tres y *n* dimensiones con las progresiones aritméticas, existieran también con las progresiones geométricas.

3.2.1 - Término General de una $RG2D$

Llamaremos g_n al término general de las progresiones geométricas. Sabemos que dada una progresión geométrica y un número $b > 0; b \neq 1$ existe una progresión aritmética $c_1 + (n-1)d$ tal que:

$$a_1 \cdot r^{(n-1)} = b^{c_1 + (n-1)d}$$

(Este resultado es muy sencillo sin más que igualar. Obtenemos $a_1 = b^{c_1} \quad d = \log_b r$)

Usando el concepto de Redes Aritméticas, dada una $RG2D$ de término general $g_{i,j}$ y un número $b > 0; b \neq 1$, podemos encontrar una $RA2D$ de término general $a_{i,j}$ de forma que $b^{a_{i,j}} = g_{i,j}$.

Probamos a ver si se cumple también para dos dimensiones:

$$b^{d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1) + h_1\cdot(i-1) + v_1\cdot(j-1) + a_{1,1}} = \left[b^{d_P}\right]^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot \left[b^{h_1}\right]^{i-1} \cdot \left[b^{v_1}\right]^{j-1} \cdot \left[b^{a_{1,1}}\right]$$

A las incógnitas (entre corchetes) en la que nos aparece *b* la simplificaremos en una sola incógnita:

$$\left[b^{d_P}\right]^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot \left[b^{h_1}\right]^{i-1} \cdot \left[b^{v_1}\right]^{j-1} \cdot \left[b^{a_{1,1}}\right] = r_X^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot h_1^{i-1} \cdot v_1^{j-1} \cdot a_{1,1} = g_{i,j}$$

Hemos sustituido el último por $a_{1,1}$ ya que el término general, para $i = 1; j = 1$ el valor obtenido era $b^{a_{1,1}}$. A partir de ahora, denominaremos $RG2D$ adjunta a una $RA2D$ a la Red Geométrica que se obtiene cuando $b = e$, es decir $e^{a_{i,j}} = g_{i,j}\ adjunta$.

Representamos un cuadro que representa este término general:

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\iddots$

$a_{1,1} \cdot v_1^3$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1^3 \cdot r_X^3$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1^3 \cdot r_X^6$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1^3 \cdot r_X^9$
$a_{1,1} \cdot v_1^2$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1^2 \cdot r_X^2$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1^2 \cdot r_X^4$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1^2 \cdot r_X^6$

$a_{1,1} \cdot v_1$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1 \cdot r_X$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1 \cdot r_X^{\ 2}$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1 \cdot r_X^{\ 3}$
$a_{1,1}$	$a_{1,1} \cdot h_1$	$a_{1,1} \cdot h_1^2$	$a_{1,1} \cdot h_1^3$

…

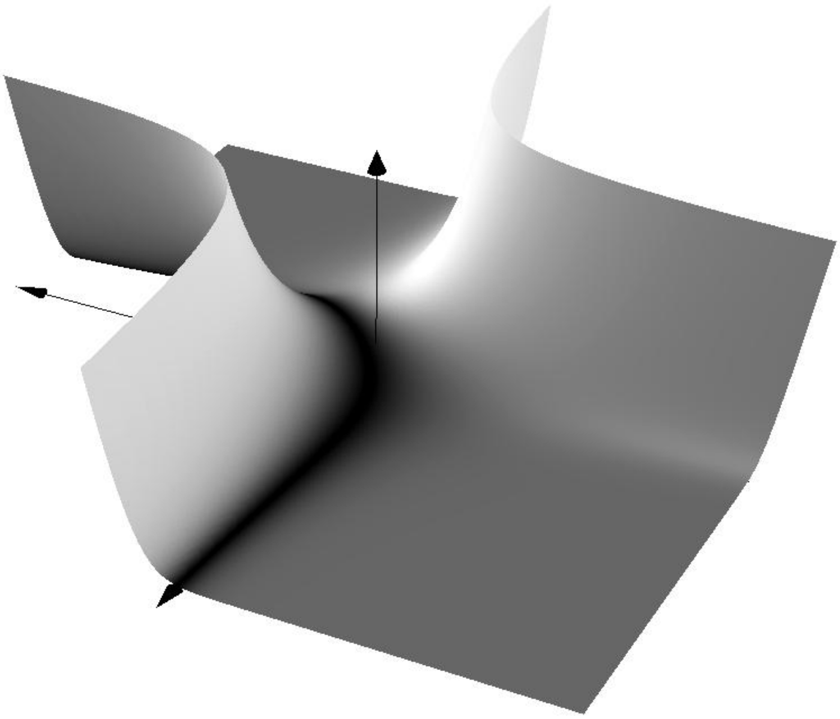
Como vemos en la tabla cada fila y columna conforma una progresión geométrica, cuyas razones a su vez forman otra progresión geométrica, cuya razón es r_X , lo vemos mejor en el siguiente cuadro:

$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iddots$

$h_1 \cdot r_X^{\ 3}$	$a_{1,1} \cdot v_1^3$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1^3 \cdot r_X^{\ 3}$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1^3 \cdot r_X^{\ 6}$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1^3 \cdot r_X^{\ 9}$	
$h_1 \cdot r_X^{\ 2}$	$a_{1,1} \cdot v_1^2$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1^2 \cdot r_X^{\ 2}$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1^2 \cdot r_X^{\ 4}$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1^2 \cdot r_X^{\ 6}$	
$h_1 \cdot r_X$	$a_{1,1} \cdot v_1$	$a_{1,1} \cdot h_1 \cdot v_1 \cdot r_X$	$a_{1,1} \cdot h_1^2 \cdot v_1 \cdot r_X^{\ 2}$	$a_{1,1} \cdot h_1^3 \cdot v_1 \cdot r_X^{\ 3}$	
h_1	$a_{1,1}$	$a_{1,1} \cdot h_1$	$a_{1,1} \cdot h_1^2$	$a_{1,1} \cdot h_1^3$	…
r_X	v_1	$v_1 \cdot r_X$	$v_1 \cdot r_X^{\ 2}$	$v_1 \cdot r_X^{\ 3}$	…

Aquí se puede ver bien las razones de cada fila y columna (rojo) y la razón común a estas progresiones (verde). Al igual que hicimos con las $RA2D$, nos planteamos representar esto geométricamente tomando las variables (las coordenadas) como continuas, tal y como explicamos entonces.

Se obtiene lo siguiente:



3.2.2 - Término General de una $RG3D$

En este caso ocurre exactamente lo mismo que en las dos dimensiones inferiores:

$$b^{a_{i,j,k}} = g_{i,j,k}$$

Un número b elevado al término general de una $RA3D$ equivale al término general de una $RG3D$:

$$g_{i,j,k} = b^{d_P\cdot(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)+d_{i,j,1}\cdot(i-1)\cdot(j-1)+d_{i,1,k}\cdot(i-1)\cdot(k-1)+d_{1,j,k}\cdot(j-1)\cdot(k-1)+d_{i,1,1}\cdot(i-1)+d_{1,j,1}\cdot(j-1)+d_{1,1,k}\cdot(k-1)+a_{1,1,1}} =$$

$$= \left[b^{d_P}\right]^{(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)} \cdot \left[b^{d_{i,j,1}}\right]^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot \left[b^{d_{i,1,k}}\right]^{(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \left[b^{d_{1,j,k}}\right]^{(j-1)\cdot(k-1)} \cdot \left[b^{d_{i,1,1}}\right]^{i-1} \cdot \left[b^{d_{1,j,1}}\right]^{j-1} \cdot \left[b^{d_{1,1,k}}\right]^{k-1} \cdot \left[b^{a_{1,1,1}}\right] =$$

$$= {r_X}^{(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)} \cdot {d_{i,j,1}}^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot {d_{i,1,k}}^{(i-1)\cdot(k-1)} \cdot {d_{1,j,k}}^{(j-1)\cdot(k-1)} \cdot {d_{i,1,1}}^{i-1} \cdot {d_{1,j,1}}^{j-1} \cdot {d_{1,1,k}}^{k-1} \cdot a_{1,1,1} = g_{i,j,k}$$

Debemos recordar que las incógnitas sustituidas al final de la operatoria no son las mismas que las incógnitas de las Redes Aritméticas, pese a que tengan el mismo nombre.

El diagrama que lo representa es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a_{1,1,1}\cdot d_{1,j,1}\cdot d_{1,1,k}\cdot d_{1,j,k} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{1,1,1}\cdot d_{i,1,1}\cdot d_{1,j,1}\cdot d_{1,1,k}\cdot d_{i,j,1}\cdot d_{i,1,k}\cdot d_{1,j,k}\cdot r_X \\
 & & \uparrow & & & \uparrow & \\
a_{1,1,1}\cdot d_{1,j,1} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{1,1,1}\cdot d_{i,1,1}\cdot d_{1,j,1}\cdot d_{i,j,1} & | & \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \downarrow & \\
| & & a_{1,1,1}\cdot d_{1,1,k} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{1,1,1}\cdot d_{i,1,1}\cdot d_{1,1,k}\cdot d_{i,1,k} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
a_{1,1,1} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{1,1,1}\cdot d_{i,1,1} & &
\end{array}$$

3.2.3 - Término General de una $RGND$

Ya que $g_{p_1,p_2,\ldots,p_n} = b^{a_{p_1,p_2,\ldots,p_n}}$ y sabiendo el término general de las $RAND$ podemos calcular fácilmente el término general de una Red Geométrica n-dimensional:

$$g_{p_1,p_2,\ldots,p_n} = r_X^{\prod_{i=1}^{n} p_i} \cdot \prod_{j=2}^{2^n-1}\left(b_j^{\,a_j}\right) \cdot a_{1,1,\ldots,1}$$

Siendo r_X la Razón del Hiper-prisma, n el número de dimensiones, b_j las diferencias de Priscila en dimensiones inferiores, $a_{1,1,\ldots,1}$ el primer término y cada a_j es cada uno de los sumandos que se obtienen al desarrollar $\prod_{i=1}^{n}\left[\left(p_i-1\right)+1\right]$, recordando que p_i-1 no se puede efectuar.

3.3 - Suma de los primeros términos de una Red Aritmética

Abordamos ahora otro de los problemas de la generalización del concepto de p. a. ¿Habrá una expresión para la suma de los términos de una red aritmética n-dimensional, para cualquier valor de n?

3.3.1 - Suma de los elementos de una $RA2D$

Otro aspecto muy importante de las progresiones aritméticas tradicionales es la suma de sus elementos. Así tenemos que para una progresión aritmética ordinaria en una dimensión la suma de sus n términos responde a la fórmula: $S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$ (siendo a_1 el primer término de la sucesión y a_n el último).

Dada una $RA2D$ cualquiera de n filas y m columnas: $\left(a_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \end{pmatrix}$

$1 \le i \le n \qquad 1 \le j \le m$

Sumando los elementos de cada fila obtenemos:

$$S_{n,1} = \frac{n\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}\right)}{2}; S_{n,2} = \frac{n\cdot\left(a_{1,2}+a_{n,2}\right)}{2}; \ldots; S_{n,j} = \frac{n\cdot\left(a_{1,m}+a_{n,m}\right)}{2}$$

Sumando todas las filas tenemos:

$$S_{n,m} = \sum_{i,j=1}^{n,m} S_{i,j} = \frac{n}{2}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}\right) + \frac{n}{2}\cdot\left(a_{1,2}+a_{n,2}\right) + \ldots + \frac{n}{2}\cdot\left(a_{1,m}+a_{n,m}\right) =$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left[\left(a_{1,1}+a_{1,2}+\ldots+a_{1,m}\right)+\left(a_{n,1}+a_{n,2}+\ldots+a_{n,m}\right)\right] =$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left[\frac{m}{2}\cdot\left(a_{1,1}+a_{1,m}\right)+\frac{m}{2}\cdot\left(a_{n,1}+a_{n,m}\right)\right] =$$

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,m}+a_{n,m}\right) = \frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,m}+a_{n,m}\right)$$

Teorema: La suma de los elementos de una $RA2D$ es $\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,m}+a_{n,m}\right)$

(Resultado que generaliza la solución del 2º problema del punto 1.1, uno de los problemas iniciales y punto de partida del presente trabajo).

Como podemos observar, la suma de todos los elementos de una $RA2D$ se obtiene a partir de los cuatro elementos de las esquinas de dicha red. Hemos obtenido así una generalización para dos dimensiones, de la fórmula tradicional de las progresiones aritméticas unidimensionales, ya que si $m=1$, obtenemos:

$$S_n = \frac{n\cdot 1}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,m}+a_{n,m}\right) = \frac{n}{4}\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}+a_{1,1}+a_{n,1}\right) = \frac{n}{4}\cdot\left(2a_{1,1}+2a_{n,1}\right) = \frac{n\cdot\left(a_{1,1}+a_{n,1}\right)}{2}$$

Ésta es la fórmula de la suma de los n primeros términos de una $RA1D$ o p. a. tradicional.

Por otra parte, sabemos que la suma de los elementos de una $RA1D$ se puede obtener a partir del término central si n es impar. Así para la progresión $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ se cumple que $S = a_{\frac{n+1}{2}}\cdot n$ siendo $a_{\frac{n+1}{2}}$ el término central de la sucesión, siendo n es impar. Este resultado nos permite expresar la suma de los términos de una $RA2D$ en función de un solo elemento de la misma, siempre que las dimensiones (nº de filas y de columnas) de la $RA2D$ sean impares.

Sumando por filas nos queda:

$$S_{n,1} = n \cdot a_{\frac{n+1}{2},1} ; S_{n,2} = n \cdot a_{\frac{n+1}{2},2} ; \ldots ; S_{n,j} = n \cdot a_{\frac{n+1}{2},m}$$

Sumando todas las filas tenemos:

$$S_{n,m} = \sum_{i,j=1}^{n,m} S_{i,j} = \left(a_{\frac{n+1}{2},1} + a_{\frac{n+1}{2},2} + \ldots + a_{\frac{n+1}{2},m} \right) \cdot n = \left[\frac{m}{2} \cdot \left(a_{\frac{n+1}{2},1} + a_{\frac{n+1}{2},m} \right) \right] \cdot n = n \cdot m \cdot a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}}$$

Siendo este elemento de la *RA2D* el que podríamos considerar como término central de la misma siempre que m y n sean impares.

Si calculamos el valor de cada término aplicando el término general podemos obtener la suma de los n primeros términos en función de $d_P, h_1, v_1, a_{1,1}$:

$$a_{i,j} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) + h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$$

$$n \cdot m \cdot a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}} = n \cdot m \cdot \left[d_P \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{m+1}{2} - 1 \right) + h_1 \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) + v_1 \cdot \left(\frac{m+1}{2} - 1 \right) + a_{1,1} \right] =$$

$$= n \cdot m \cdot \left[d_P \cdot \left(\frac{n-1}{2} \right) \cdot \left(\frac{m-1}{2} \right) + h_1 \cdot \left(\frac{n-1}{2} \right) + v_1 \cdot \left(\frac{m-1}{2} \right) + a_{1,1} \right] =$$

$$= n \cdot m \cdot \left[\frac{d_P}{4} \cdot (n-1) \cdot (m-1) + \frac{h_1}{2} \cdot (n-1) + \frac{v_1}{2} \cdot (m-1) + a_{1,1} \right] =$$

$$= \frac{n \cdot m}{4} \cdot \left[d_P \cdot (n-1) \cdot (m-1) + 2h_1 \cdot (n-1) + 2v_1 \cdot (m-1) + 4a_{1,1} \right] = S_{n,m}$$

El resultado anterior lo podemos enunciar de la siguiente manera:

Teorema: La suma de los elementos de una *RA2D* de dimensiones $n \times m$ la podemos obtener en función de la Diferencia de Priscila (d_P), las diferencias de las primeras líneas (h_1, v_1) y el primer término $a_{1,1}$ según la expresión anterior.

Vamos a introducir nuevas conexiones, esta vez entre el campo de las redes aritméticas y el del análisis matemático, concretamente con el cálculo integral. Veremos que la suma de los elementos de una red aritmética se puede obtener mediante una integral adecuada, con lo que el significado de la integral como una suma se ve reforzado y utilizado en un campo inesperado.

Teorema: La suma de los elementos de una *RA2D* se puede escribir en forma de doble integral definida para todos los $n, m > 1$:

$$S_{n,m}=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\int_0^{n-1}\left[\int_0^{m-1}\left(d_P\cdot x\cdot y+h_1\cdot x+v_1\cdot y+a_{1,1}\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\int_0^{n-1}\left[d_p\cdot x\cdot\frac{y^2}{2}+h_1\cdot x\cdot y+v_1\cdot\frac{y^2}{2}+a_{1,1}\cdot y\right]_0^{m-1}dx=$$

$$=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\int_0^{n-1}\left[d_p\cdot x\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+h_1\cdot x\cdot(m-1)+v_1\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+a_{1,1}\cdot(m-1)\right]dx=$$

$$=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\left(\left[d_p\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+h_1\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(m-1)+v_1\cdot x\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+a_{1,1}\cdot x\cdot(m-1)\right]_0^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\left(d_p\cdot\frac{(n-1)^2}{2}\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+h_1\cdot\frac{(n-1)^2}{2}\cdot(m-1)+v_1\cdot(n-1)\cdot\frac{(m-1)^2}{2}+a_{1,1}\cdot(n-1)\cdot(m-1)\right)=$$

$$=\frac{n\cdot m}{(n-1)\cdot(m-1)}\cdot\frac{(n-1)\cdot(m-1)}{4}\cdot\left[d_p\cdot(n-1)\cdot(m-1)+2h_1\cdot(n-1)+2v_1\cdot(m-1)+4a_{1,1}\right]=$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[d_p\cdot(n-1)\cdot(m-1)+2h_1\cdot(n-1)+2v_1\cdot(m-1)+4a_{1,1}\right]=S_{n,m}$$

La fórmula anterior tiene una análoga para el caso de progresiones aritméticas tradicionales. Vamos a verla.

Corolario:

La suma de los n elementos de una p. a. tradicional (n>1) se puede obtener mediante la expresión

$$S_n=\frac{n}{n-1}\cdot\int_0^{n-1}\left(a_1+x\cdot d\right)dx$$

La demostración de este resultado es trivial (a_1 y d son, respectivamente, el primer término y la diferencia de la p. a.).

$$S_n=\frac{n}{n-1}\cdot\int_0^{n-1}\left(a_1+x\cdot d\right)dx=$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\left(\left[x\cdot a_1+\frac{x^2}{2}\cdot d\right]_0^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\left((n-1)\cdot a_1+\frac{(n-1)^2}{2}\cdot d\right)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\left(2a_1+(n-1)\cdot d\right)=$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\left(2a_1+(n-1)\cdot d\right)=S_n$$

3.3.2 - Suma de los elementos de una $RA3D$

Al igual que en el caso de las $RA2D$, en este caso también existe una fórmula análoga a la anterior que nos determina la suma de los elementos de una $RA3D$.

Dada una $RA3D$ cualquiera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a_{1,m,p} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{n,m,p} \\
 & \nearrow & \uparrow & & & \nearrow & \uparrow \\
a_{1,m,1} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{n,m,1} & & | \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
| & & a_{1,1,p} & \leftarrow & + & \rightarrow & a_{n,1,p} \\
\downarrow & \swarrow & & & \downarrow & \swarrow & \\
a_{1,1,1} & \leftarrow & - & \rightarrow & a_{n,1,1} & &
\end{array}$$

Es posible calcular la suma de los n,m,p primeros términos calculando la suma de los $RA2D$ para cada p:

$$S_{n,m,1}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{n,1,1}+a_{1,m,1}+a_{n,m,1}\right);S_{n,m,2}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,2}+a_{n,1,2}+a_{1,m,2}+a_{n,m,2}\right)$$

$$S_{n,m,3}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,3}+a_{n,1,3}+a_{1,m,3}+a_{n,m,3}\right);\ldots;S_{n,m,p}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,p}+a_{n,1,p}+a_{1,m,p}+a_{n,m,p}\right)$$

Sumando todas las "láminas" de la $RA3D$:

$$S_{n,m,p}=S_{n,m,1}+S_{n,m,2}+\ldots+S_{n,m,p}=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{n,1,1}+a_{1,m,1}+a_{n,m,1}\right)+\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,2}+a_{n,1,2}+a_{1,m,2}+a_{n,m,2}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left(a_{1,1,p}+a_{n,1,p}+a_{1,m,p}+a_{n,m,p}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\left(a_{1,1,1}+a_{n,1,1}+a_{1,m,1}+a_{n,m,1}\right)+\left(a_{1,1,2}+a_{n,1,2}+a_{1,m,2}+a_{n,m,2}\right)+\ldots+\left(a_{1,1,p}+a_{n,1,p}+a_{1,m,p}+a_{n,m,p}\right)\right]=$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,2}+\ldots+a_{1,1,p}\right)+\left(a_{n,1,1}+a_{n,1,2}+\ldots+a_{n,1,p}\right)+\left(a_{1,m,1}+a_{1,m,2}+\ldots+a_{1,m,p}\right)+\left(a_{n,m,1}+a_{n,m,2}+\ldots+a_{n,m,p}\right)\right]$$

$$=\frac{n\cdot m}{4}\cdot\left[\frac{p}{2}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{n,1,1}+a_{n,1,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{1,m,1}+a_{1,m,p}\right)+\frac{p}{2}\cdot\left(a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)\right]=$$

$$=\frac{n\cdot m\cdot p}{8}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}+a_{n,1,1}+a_{n,1,p}+a_{1,m,1}+a_{1,m,p}+a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)=S_{n,m,p}$$

Teorema: La suma de los elementos de una $RA3D$, de dimensiones n,m,p, viene dada por la siguiente expresión:

$$S_{n,m,p}=\frac{n\cdot m\cdot p}{8}\cdot\left(a_{1,1,1}+a_{1,1,p}+a_{n,1,1}+a_{n,1,p}+a_{1,m,1}+a_{1,m,p}+a_{n,m,1}+a_{n,m,p}\right)$$

Esta fórmula es análoga a la de dos dimensiones y a la fórmula tradicional de las $RA1D$ y nos da la suma de los $m\times n\times p$ primeros elementos de la $RA3D$, en función de las dimensiones n,m,p y de los 8 elementos de las esquinas.

Análogamente, también existirá una expresión para determinar la suma de los elementos de una $RA3D$ en función de su término central.

Si en una $RA3D$ n,m,p son impares, existe un término central que coincide con $a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{p+1}{2}}$.

Teorema: La suma de todos los elementos de una Red Aritmética Tridimensional, si m,n,p son impares, en función de su término central es $S_{n,m,p} = m \cdot n \cdot p \cdot a_{\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2},\frac{p+1}{2}}$.

La demostración de esta fórmula es análoga a la de dos dimensiones, por lo que continuamos demostrando otras fórmulas no demostradas anteriormente.

Teorema: La suma de todos los elementos de una Red Aritmética Tridimensional se puede escribir en forma de triple integral definida:

$$S_{n,m} = \frac{n \cdot m \cdot p}{(n-1)\cdot(m-1)\cdot(p-1)} \cdot \int_0^{n-1}\left[\int_0^{m-1}\left[\int_0^{p-1}\left(d_P \cdot xyz + d_{i,j,1}\cdot xy + d_{i,1,k}\cdot xz + d_{1,j,k}\cdot yz + d_{i,1,1}\cdot x + d_{1,j,1}\cdot y + d_{1,1,k}\cdot z + a_{1,1,1}\right)dz\right]dy\right]dx$$

Los valores de las dimensiones deben ser mayores que uno para que el denominador no se haga cero. Si alguna de las dimensiones es 1, la red no es propiamente tridimensional, y no tendría sentido tenerla en cuenta. Si todas las dimensiones fueran 1, tendríamos sólo el primer elemento de una p. a. y no tendría sentido utilizar ninguna fórmula para hacer la suma.

3.3.3 - Suma de los elementos de una $RAND$

Debemos aclarar que para las Redes Aritméticas n-dimensionales los resultados son análogos a los anteriores, aunque no los demostraremos por problemas de subíndices y de notación compleja.

Llamaremos a las dimensiones $d_1, d_2, \ldots, d_n$, siendo n el número de dimensiones:

Así, la suma de todos sus elementos vendrá dada en función de la mitad de todas sus dimensiones $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{d_n}{2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2^n}$ multiplicadas por los 2^n elementos situados en las "esquinas" del hiper-prisma n-dimensional formado:

$$S_{d_1,d_2,\ldots,d_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{2^n}\left[\sum_{\sigma\in T}\left(a_{\sigma(p_1),\sigma(p_2),\ldots,\sigma(p_n)}\right)\right]$$

Siendo σ la aplicación que hace que las coordenadas sean propias de las esquinas:

$$\sigma : \underbrace{\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}}_{P} \rightarrow \underbrace{\{1, d_1, d_2, \ldots, d_n\}}_{D^*} ; \sigma(p_i) = \begin{cases} 1 \\ ó \\ d_i \end{cases}$$

Y T el conjunto de estas aplicaciones:

$$T = \left\{ \sigma : P \rightarrow D^* \Big/ \sigma(p_i) = \begin{cases} 1 \\ ó \\ d_i \end{cases} \right\}$$

Debe tenerse en cuenta que $card\ T = 2^n$ (como era lo esperado).

Si sus dimensiones son todas impares, entonces existirá un término central en la red y por tanto la suma de todos los elementos de dicha red será el producto de este término central por todas sus dimensiones $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ por lo que nos aparecerá una fórmula análoga aplicable a todos los casos con dimensiones pares e impares se obtienen los siguientes resultados:

1 - $S_{d_1,d_2,\ldots,d_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} d_i\right) \cdot a_{\frac{d_1+1}{2},\frac{d_2+1}{2},\ldots,\frac{d_n+1}{2}}$

2 - La suma se puede expresar en forma de integral, con $d_i > 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

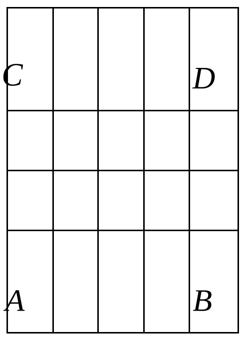
$$S_{d_1,d_2,\ldots,d_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)} \cdot \int_0^{d_1-1}\left[\int_0^{d_2-1}\left[\ldots\left[\int_0^{d_n-1}\left(a_{p_1,p_2,\ldots,p_n}\right)dp_n\right]\ldots\right]dp_2\right]dp_1$$

Por lo que se pueden igualar ambas expresiones y despejar el valor del término central de una Red Aritmética en cualquier dimensión con $d_i > 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$:

$$a_{\frac{d_1+1}{2},\frac{d_2+1}{2},\ldots,\frac{d_n+1}{2}} = \frac{\int_0^{d_1-1}\left[\int_0^{d_2-1}\left[\ldots\left[\int_0^{d_n-1}\left(a_{p_1+1,p_2+1,\ldots,p_n+1}\right)dp_n\right]\ldots\right]dp_2\right]dp_1}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)}$$

3.4 - Interpolación en Redes Aritméticas

3.4.1 - Interpolación en una $RA2D$



Dados cuatro números de un cuadro aritmético que formen un rectángulo, introducir entre ellos un número determinado de elementos $(n \times m)$, los deseados, y que el cuadro resultante siga siendo una $RA2D$:

A partir de este problema, tratamos de calcular el término general del nuevo cuadro, el que forman los nuevos números y los anteriores, cuadro que llamaremos "interpolado". Que deberá responder al término general $a_{i,j} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) + h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$

Comencemos por calcular h_1 y v_1:

Igualando i a 1, obtenemos el término general para la primera columna, que será una progresión aritmética, por lo que será fácil de interpolar $a_{1,j} = v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}$.

Sabemos que en la progresión aritmética interpolada debe haber $m+2$ términos, así que, sustituyéndolo por j y despejando obtendremos v_1' y h_1' del cuadro interpolado, también podemos igualar $a_{1,1}$ a A (según la figura superior) y $a_{1,m+2}$ a C:

$$C = v_1' \cdot (m+1) + A \qquad\qquad B = h_1' \cdot (n+1) + A$$

$$v_1' = \frac{C-A}{m+1} \qquad\qquad h_1' = \frac{B-A}{n+1}$$

Para obtener la Diferencia de Priscila nos vamos a servir del hecho de que las diferencias de las columnas forman a su vez progresiones aritméticas, se trata del mismo procedimiento de antes pero interpretando ahora las diferencias verticales como términos de una progresión aritmética que hay que interpolar.

$$d_P' = \frac{v_n' - v_1'}{n+1} = \frac{\frac{D-B}{m+1} - \frac{C-A}{m+1}}{n+1} = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)}$$

Sustituyendo cada incógnita en su lugar obtendremos el término general:

$$a_{i,j}' = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)} \cdot (i-1)\cdot(j-1) + \frac{B-A}{n+1}\cdot(i-1) + \frac{C-A}{m+1}\cdot(j-1) + A$$

La suma de este cuadro resulta sencilla ya que ya tenemos definidas las dimensiones del mismo $(n \times m)$ y los términos de las esquinas (A,B,C,D):

$$S = \frac{(n+2)(m+2)}{4}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D})$$

3.4.2 - Interpolación en una $RA3D$

El modo de proceder es el mismo que en el anterior caso salvo que ahora se interpola en tres dimensiones siendo 8 los números que conocemos y habiendo que colocar $(n \times m \times p)$ números entre esas 8 esquinas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & G & \leftarrow & - & \rightarrow & H \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
C & \leftarrow & + & \rightarrow & D & & | \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
| & & E & \leftarrow & + & \rightarrow & F \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
A & \leftarrow & - & \rightarrow & B & &
\end{array}$$

Al igual que para dos dimensiones, observamos el término general de un prisma aritmético normal de tres dimensiones y calculamos las nuevas incógnitas del prisma interpolado.

El término general es:

$$a_{i,j,k} = d_P \cdot (i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1) + d_{i,j,1}\cdot(i-1)\cdot(j-1) + d_{i,1,k}\cdot(i-1)\cdot(k-1) + d_{1,j,k}\cdot(j-1)\cdot(k-1)$$
$$+ d_{i,1,1}\cdot(i-1) + d_{1,j,1}\cdot(j-1) + d_{1,1,k}\cdot(k-1) + a_{1,1,1}$$

Procedemos a calcular la Diferencia de Priscila del nuevo prisma en función de los términos interpolados sabiendo que las de las “láminas” del prisma forman una progresión aritmética:

$$d_P' = \frac{k_p' - k_1'}{p+1} = \frac{\frac{E-F-G+H}{(n+1)\cdot(m+1)} - \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)}}{p+1} = \frac{E-F-G+H-A+B+C-D}{(n+1)\cdot(m+1)\cdot(p+1)}$$

A continuación calculamos $d_{i,j,1}', d_{i,1,k}', d_{1,j,k}'$ aplicando los resultados obtenidos en dos dimensiones, ya que estas incógnitas representan las Diferencias de Priscila de las caras:

$$d_{i,j,1}' = \frac{A-B-C+D}{(n+1)\cdot(m+1)};\, d_{i,1,k}' = \frac{A-B-E+F}{(n+1)\cdot(m+1)};\, d_{1,j,k}' = \frac{A-E-C+G}{(n+1)\cdot(m+1)}$$

Ahora calculamos t_1', t_2', t_3' que son diferencias lineales, por lo que son sencillas de calcular:

$$d_{i,1,1}' = \frac{B-A}{n+1};\, d_{1,j,1}' = \frac{C-A}{m+1};\, d_{1,1,k}' = \frac{E-A}{p+1}$$

Sustituimos ahora todas las incógnitas en el término general de una *RA3D* y obtenemos el término general del cuadro interpolado:

$$a_{i,j,k}' = (E-F-G+H-A+B+C-D)\cdot\frac{(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(m+1)\cdot(p+1)} + (A-B-C+D)\cdot\frac{(i-1)\cdot(j-1)}{(n+1)\cdot(m+1)} +$$
$$+(A-B-E+F)\cdot\frac{(i-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(p+1)} + (A-E-C+G)\cdot\frac{(j-1)\cdot(k-1)}{(m+1)\cdot(p+1)} + (B-A)\cdot\frac{i-1}{n+1} + (C-A)\cdot\frac{j-1}{m+1} + (E-A)\cdot\frac{k-1}{p+1} + A$$

Análogamente a como lo hicimos en dos dimensiones obtenemos la fórmula para la suma de todo el cuadro:

$$S = \frac{(n+2)(m+2)(p+2)}{8}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}+\mathrm{E}+\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H})$$

3.4.3 - Interpolación en una *RAND*

En este caso no podremos escribir el término general del mismo ya que resulta muy difícil escribir todas (2^n) las nuevas incógnitas en función de las esquinas. Sin embargo sí que podemos calcular la Diferencia de Priscila del nuevo hiper-prisma interpolado analizando las analogías existentes entre los dos primeros casos:

Sabemos que para calcular cualquier diferencia, ya sea de Priscila o no, para cualquier dimensión, siempre hay que restar el último término del primero, pero si a su vez, estos términos son Diferencias de Priscila correspondientes a una dimensión menor, entonces vuelve a ser necesario hacer una resta del último menos el primer término.

Esto nos da lugar a que, a cada término le corresponda estar sumado o restado, según hemos podido observar en los dos casos analizados.

Para eso debemos preguntarnos: ¿qué diferencia al último término de cualquier progresión en una dimensión dada, del primero en la misma? La respuesta está en las coordenadas, el último término tendrá como coordenada i-ésima d_i (cuyo signo será positivo), mientras que el primero de dicha sucesión será 1 (que llevará signo negativo).

Sin salirnos del hiper-prisma, igualemos a 1 cualquier coordenada, volvemos a tener un último término y un primero, en el que nos volverá a pasar lo mismo. Y así hasta llegar a las progresiones lineales, en todas nos sucede lo mismo.

Partiendo del último término de un hiper-prisma aritmético $\left(a_{d_1,d_2,\ldots,d_n}\right)$, que llevará signo positivo si la dimensión (n) es par, y en caso contrario negativo. Por lo que su signo es expresable de la siguiente manera: $(-1)^n$. Pero, igualando cualquiera de sus coordenadas a 1, que nos daría una hipotética progresión aritmética de Diferencias de Priscila de una dimensión $(n-1)$, obtendremos un término que lleva signo contrario al último. Así que el signo de todos los términos que tienen uno, y sólo un 1 en sus coordenadas, vendrá dado por $(-1)^{n-1}$.

Si el número de "unos" en las coordenadas fuese 2, entonces el signo sería $(-1)^{n-2}$. Podemos generalizar esto diciendo que el signo será igual al que tenga -1 elevado al número de dimensiones menos el número de "unos" que haya en sus coordenadas. Si lo multiplicamos por el término en sí obtenemos el número dado correspondiente con su signo. Así que:

$$d_P{}' = \frac{\sum_{\sigma\in T}\left[(-1)^{n-\left(Card\{p_k=1/\forall k=1,2\ldots n\}\right)}\cdot a_{\sigma(p_1),\sigma(p_2),\ldots,\sigma(p_n)}\right]}{\prod_{i=1}^{n}(d_i+1)}$$

Siendo σ la aplicación que hace que las coordenadas sean propias de las esquinas:

$$\sigma:\underbrace{\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}}_{P}\to\underbrace{\{1,d_1,d_2,\ldots,d_n\}}_{D^*};\sigma(p_i)=\begin{cases}1\\ ó\\ d_i\end{cases}$$

Y T el conjunto de estas aplicaciones:

$$T=\left\{\sigma:P\to D^*\Big/\ \sigma(p_i)=\begin{cases}1\\ ó\\ d_i\end{cases}\right\}$$

(Téngase en cuenta que, como no podía ser de otra manera, $card\,T=2^n$)

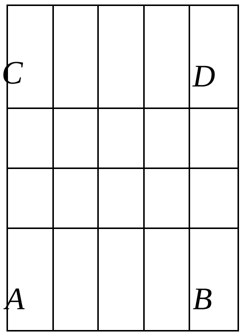
3.5 - Interpolación en Redes Geométricas

Por último vamos a resolver el problema de la interpolación de medios geométricos en redes geométricas.

3.5.1 - Interpolación en una $RG2D$

A igual que en un cuadro aritmético, lo que tratamos de resolver es la búsqueda del término general del nuevo cuadro geométrico interpolado.

Llamaremos y colocaremos a los cuatro números de la misma forma que antes siendo los términos que queremos introducir también $n\times m$:



Al igual que en el caso aritmético, tenemos que calcular las progresiones vertical y horizontal y la razón común a la progresión que forman las razones de las progresiones.

$$g_{i,j} = r_X^{(i-1)\cdot(j-1)} \cdot h_1^{(i-1)} \cdot v_1^{(j-1)} \cdot a_{1,1}$$

Despejamos h_1' a partir de la relación que hay entre A y B en función de n, el número de términos que añadimos sabiendo que igualando j a 1 obtenemos el término general de la primera fila $g_{i,1} = h_1^{(i-1)} \cdot a_{1,1}$ y podemos igualar $a_{1,1}$ a A así como $a_{i,j}$ a B, realizando lo propio con v_1':

$$B = h_1'^{(n+1)} \cdot A \qquad C = v_1'^{(m+1)} \cdot A$$

$$h_1' = \sqrt[n+1]{B/A} \qquad v_1' = \sqrt[m+1]{C/A}$$

Calculamos ahora r_X sabiendo que las razones horizontales forman una progresión geométrica y que podemos interpolarla.

$$r_X' = \sqrt[m+1]{h_n'/h_1'} = \sqrt[m+1]{\frac{\sqrt[n+1]{D/C}}{\sqrt[n+1]{B/A}}} = \sqrt[(n+1)\cdot(m+1)]{\frac{A\cdot D}{B\cdot C}} = \left(\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\right)^{\frac{1}{(n+1)\cdot(m+1)}}$$

Y finalmente sustituimos las nuevas razones en el término general para obtener el nuevo término general del cuadro interpolado:

$$g_{i,j}' = \left(\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\right)^{\frac{(i-1)\cdot(j-1)}{(n+1)\cdot(m+1)}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{i-1}{n+1}} \cdot \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{j-1}{m+1}} \cdot A$$

3.5.2 - Interpolación en una $RG3D$

Una de las ventajas del estudio de las Redes Geométricas es que existen muchas analogías con las Redes Aritméticas.

Como podemos observar entre la fórmula de la interpolación en una $RA2D$ y en una $RG2D$ todo lo que aparece sumado en una, aparece multiplicado en la otra, lo multiplicado en elevado y lo restado en dividido. Así que en tres dimensiones podemos establecer un término general para el prisma geométrico interpolado:

$$g_{i,j,k}{}' = \left(\frac{B\cdot C\cdot E\cdot H}{A\cdot D\cdot F\cdot G}\right)^{\frac{(i-1)\cdot(j-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(m+1)\cdot(p+1)}}\cdot\left(\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\right)^{\frac{(i-1)\cdot(j-1)}{(n+1)\cdot(m+1)}}\cdot\left(\frac{A\cdot F}{B\cdot E}\right)^{\frac{(i-1)\cdot(k-1)}{(n+1)\cdot(p+1)}}\cdot\left(\frac{A\cdot G}{E\cdot C}\right)^{\frac{(j-1)\cdot(k-1)}{(m+1)\cdot(p+1)}}\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{i-1}{n+1}}\cdot\left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{j-1}{m+1}}\cdot\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{k-1}{p+1}}\cdot A$$

3.5.3 - Interpolación en una $RGND$

En cuanto a la interpolación en una $RGND$ nos pasa igual que en las aritméticas: no es posible escribir el término general, pero podemos estudiar la Razón del hiper-prisma geométrico.

Usando la misma analogía que en el caso anterior podemos escribir:

$$r_X{}' = \left[\prod_{\sigma\in T}\left[\left(a_{\sigma(p_1),\sigma(p_2),\ldots,\sigma(p_n)}\right)^{(-1)^{n-Card\{p_k=1/\forall k=1,2\ldots n\}}}\right]\right]^{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(d_i+1)}}$$

Siendo σ la aplicación que hace que las coordenadas sean propias de las esquinas:

$$\sigma : \underbrace{\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}}_{P} \to \underbrace{\{1, d_1, d_2, \ldots, d_n\}}_{D^*}; \sigma(p_i) = \begin{cases} 1 \\ ó \\ d_i \end{cases}$$

Y T el conjunto de estas aplicaciones:

$$T = \left\{ \sigma : P \to D^* \middle/ \sigma(p_i) = \begin{cases} 1 \\ ó \\ d_i \end{cases} \right\}$$

4 – Conclusiones

Una vez concluido el trabajo de investigación podemos decir que los objetivos han sido cumplidos satisfactoriamente, aunque dejando algunos posibles caminos abiertos que luego expondremos, por los que poder continuar una futura investigación. Gracias al trabajo hemos ahondado en el método de trabajo matemático, así como en la creación de nuevas ideas a través de la generalización de resultados.

Hemos comprobado, además, lo que se siente al adentrarse por caminos inexplorados en las matemáticas, sabiendo de su dificultad, pero saliéndonos así de las matemáticas típicas enseñadas en cualquier clase. Hemos podido desarrollar cosas nuevas, pero eso sí, basándonos en conocimientos adquiridos a lo largo de todos nuestros estudios académicos, por lo que los objetivos se ven cumplidos.

El grupo ha obtenido interesantes resultados a lo largo de muchas horas de trabajo y dedicación, llegando a obtener formulas que creemos que son inéditas. Por ello pensamos que este método de trabajar y distribuir las tareas, propio de la organización de un grupo, ha sido bueno, alcanzando un alto grado de satisfacción con ello.

Otra cosa importante a mencionar son las conexiones buscadas entre los diferentes campos de las matemáticas, ya que el trabajo no se ha limitado a uno solo, sino que en él aparecen referencias a los significados geométricos de las ideas expuestas, a las ideas gráficas, al análisis matemático con el uso del cálculo integral, etc.

También cabe destacar el arduo trabajo de la notación, ya que no ha sido fácil expresar las cosas, ni expresarlas todas de igual forma para mostrar una presentación aceptable y lo más sencilla posible de entender. La envergadura de algunas fórmulas es notable y su redacción definitiva y comprensión ha exigido gran trabajo y muchas modificaciones.

Otro aspecto importante ha sido el no disparar las dimensiones del trabajo. Como puede verse, en algunos momentos, se han acortado algunos procesos largos o se han elegido los caminos más fácil de entender o con un fuerte impacto estético, esto es siempre discutible, pero tampoco queríamos que el conjunto fuera una cosa muy difícil de leer y de revisar, o que tuviera un aspecto de algo impenetrable.

Sólo queda mencionar alguna posible línea abierta de investigación, como es la fórmula de la suma en las redes geométricas con la cual estuvimos trabajando e investigando y aún continuamos, pero no hemos logrado obtener hasta el momento.

5 - BIBLIOGRAFÍA

· Aigner, M.; Zeigler, G.M.; 2005. *El Libro de las demostraciones.* Ed. Nivola, Tres Cantos (Madrid).

· Callejo, Mª L.; Vila, Antoni, 2004. *Matemáticas para enseñar a pensar.* Ed. Nancea, Madrid.

· Cañón Loyes, C. 1993. *La Matemática, creación y descubrimiento.* Universidad Pontificia de Comillas. Madrid.

· Davis, P.J.; Hersh, R.; 1989. *Experiencia Matemática.* Ed. MEC-Labor, Barcelona.

· Dunham, W., 2002. *Viaje a través de los genios.* Ed. Pirámide, Madrid.

· Guzmán, M de; Colera, J.; Salvador, A.; 1989. *Matemáticas COU.* Ed. Anaya, Madrid.

· Guzmán, M. de, 1991. *Para pensar mejor.* Ed. Labor, Barcelona.

· Guzmán, M. de, 2003. *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*. Ed. Anaya, Madrid.

· Hofstadter, D. R.; Mandelbrot, B.; y otros, 1990. *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea.* Ed. Tusquets.

· Lakatos, I., 1978. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Ed. Alianza, Madrid.

· Polya, G. 1965. *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, México.

· Taton, R. 1967. *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos.* Ed. Labor, Barcelona.

· Vizmanos, J.R.; Anzola, M. *Matemáticas 2º de Bachillerato*. Ed. S. M., Madrid.

ANEXO 7

DOCUMENTO IP-ETM. INFORME DEL PROFESOR

TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA (16-18 AÑOS)

1. *INTRODUCCIÓN*

La resolución de problemas ha sido una de las áreas más prominentes desde la segunda mitad del siglo XX en la educación matemática (p.e. Polya, 1945, Schoenfeld, 1985, Mason, Burton y Stacey; 1982) no sólo como propuesta de enseñanza y aprendizaje, sino también como planteamiento y propuesta epistemológica que da una explicación de la estructura del conocimiento matemático.

Desde varias décadas se ha reflexionado en los modelos teóricos que sustentan esta propuesta en su vertiente didáctica y cognitiva. Más recientemente la idea de *investigación matemática* o *proyecto de investigación matemática* en Secundaria surge como un acercamiento a la verdadera investigación matemática y como un paso adelante en la aplicación, cada vez más profunda, de la Resolución de Problemas (R.P.) en el aula (Braverman, 2006; Braverman y Samovol, 2008).

El curriculum español de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (Bocyl, 2009) y el de Bachillerato (Bocyl, 2008) recogen esta idea y plantean dentro de sus programas de forma prescriptiva la realización de *investigaciones matemáticas* que pueden concretarse en forma de proyectos de investigación. Es en este contexto donde se sitúa el tema de nuestro estudio que tiene por finalidad la caracterización de los procesos de investigación matemática llevados a cabo con estudiantes de Bachillerato (16-18 años), teniendo tres pilares fundamentales: el profesor, el estudiante y las tareas o proyectos de investigación.

Entendemos por proyecto de investigación matemática en Secundaria (en adelante denotado por PIM) *un conjunto de problemas de matemáticas con un tema específico, que requiera la exploración, la consideración de casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, la propuesta de conjeturas, su prueba o refutación, y el planteamiento de nuevos problemas originales que se basan en ideas del problema inicial* (Braverman y Somovol, 2008, p. 400). A este respecto, conviene aclarar que los PIM se pueden obtener a partir de un problema de investigación (por ejemplo: ¿se pueden estudiar matemáticamente los arcos de la Catedral de Burgos, mediante modelos matemáticos? ¿qué tipo de patrones numéricos aparecen?) y también se pueden obtener a partir de modificaciones en tareas típicas de resolución de problemas (por ejemplo, el PIM que se analiza en este documento). Frobisher (1994) señala que *casi siempre es posible modificar una tarea de resolución de problemas para transformarla en... una investigación*. En cualquier caso, *se debe hacer una distinción entre las tareas de resolución de problemas que conducen a las investigaciones, y... las investigaciones que tienen su propia existencia separada* (p. 158). En el estudio presentado en este documento utilizaremos PIM obtenidos a partir de modificaciones y extensiones en una tarea de resolución de problemas.

A continuación, nos gustaría reseñar algunos aspectos sobre la pertinencia de este estudio. Una primera cuestión que surge es si se puede dar por conocida la estructura de un PIM, a semejanza de un proyecto de investigación matemática de los que se desarrollan en el contexto de la Universidad. Consideramos que no, por las siguientes razones:

1. Los PIM de los que estamos hablando se desarrollan en un contexto de Bachillerato, sin tradición en desarrollar este tipo de proyectos y con algunas variables implicadas en el proceso, que no han sido estudiadas suficientemente: los estudiantes, los profesores y los contenidos matemáticos.
2. El estudiante se acerca a la investigación por primera vez, por tanto, necesita conocer la estructura del proceso de investigación, clarificar los contenidos de las tareas que debe desarrollar, resolver las dificultades que puedan surgir y conseguir, en la medida de lo posible, los objetivos propuestos (resolución del problema de investigación y aprendizajes que se esperan del proceso). En un principio, él no conoce nada de esto y, por tanto, necesita un tutor que le guíe y le ayude en las dificultades.
3. El profesor que va a dirigir un PIM, es muy probable que se acerque a la investigación por primera vez, porque en su formación inicial no tuvo este tipo de experiencias. Por ello necesita adquirir *conocimientos científicos de contenido*: método científico, proceso de descubrimiento, fases, estructura, metodologías, y tipos de investigaciones matemáticas; y *conocimientos pedagógicos de contenido* en relación con: a) los PIM (tipos, estructura y fases de los proyectos de investigación); b) con el estudiante (tareas a realizar, resolución de dificultades, aprendizajes a conseguir, interacciones con el profesor y con otros estudiantes, etc.); c) el currículo (situación de los PIM en el currículo, contenidos curriculares más adecuados para llevar a cabo un PIM, problemas ideales para generar PIM, nivel de profundización en un PIM, tipos de PIMs para proponer a los estudiantes); d) el papel del profesor en el desarrollo de un PIM (tipo de ayuda a prestar al estudiante y nivel de intervención en el proceso).

La contribución para este Cuarto Simposio Internacional ETM se centra en el tema 3 del mismo (Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones). Para ello se ha priorizado el tema de trabajo con ejemplos y contraejemplos en una demostración matemática. Con ello se intentará dar respuesta a algunas preguntas contenidas en el problema de investigación planteado en el marco de la tesis doctoral: en el desarrollo de un PIM, ¿qué papel pueden jugar los ejemplos y contraejemplos en el proceso de demostración? La interacción con el estudiante, ¿qué conocimiento matemático y sobre la enseñanza puede desarrollar en el profesor? El análisis de las producciones de los estudiantes, ¿qué principios de intervención puede proporcionar al profesor para conseguir un espacio de trabajo matemático idóneo?

2. *MARCO TEÓRICO: EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS EN UNA DEMOSTRACIÓN*

El trabajo con ejemplos y casos particulares tiene interés en la búsqueda de conjeturas y en la construcción de una demostración que justifique su veracidad o su falsedad. En el contexto de un PIM, este trabajo se sitúa, habitualmente, en la fase de resolución del problema de investigación y, más concretamente, en la búsqueda de patrones y leyes matemáticas que se quieren utilizar en la demostración que resuelve el problema de investigación planteado. A su vez, la potencialidad de los ejemplos utilizados en las pruebas está condicionada por uno de los tres elementos importantes del conocimiento del profesor sobre la prueba (Stylianides y Ball, 2008), concretamente el que se refiere a la *capacidad de entender y distinguir entre argumentos empíricos y deductivos*. En este sentido...*los argumentos empíricos no pueden contar como pruebas en ningún nivel de la enseñanza, sobre todo porque las discusiones empíricas utilizan modos inválidos de argumentación promoviendo la aceptación de las demandas matemáticas basadas en evidencias incompletas. Además, las discusiones deductivas se asocian a una gama de modos válidos de argumentación [...]. Los ejemplos incluyen los modos de la argumentación asociados al principio de la inducción matemática, la regla de equivalencia de la contraposición y la construcción de los contraejemplos.* (p. 310-311)

En nuestro estudio, analizaremos diferentes episodios con estudiantes, en los que aparecen ejemplos en el proceso de demostración de conjeturas. Para llevar a cabo el análisis utilizaremos diferentes categorías:

En primer lugar la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm, 1984; Balacheff, 1988; Harel, 2001): *Un ejemplo genérico es un objeto solo, particular, que representa el caso general y con el cual puede ser percibida una generalidad* (Pedemonte y Buchbinder, 2011, p. 257). La diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que podemos observar si dejamos a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa. Otra de las principales características de los ejemplos genéricos es que *conectan el dominio aritmético con el algebraico* (p. 265) lo que permite conectar el nivel de lo concreto con el nivel de lo general. Como plantean Pedemonte y Buchbinder (2011): si los argumentos que sirven para demostrar la conjetura *se basan en ejemplos genéricos, y tienen así una estructura deductiva, permiten la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirven como puente entre la argumentación y la prueba* (p. 266).

Otra idea en la que nos apoyaremos es la de *generalización de patrones* de Harel (2001). Este investigador ha observado dos tipos distintos de generalizaciones que corresponden a “dos maneras distintas del pensamiento'': *generalización del patrón del resultado* (*result pattern generalization)* (RPG) y *generalización del patrón del proceso* (*process pattern generalization)* (PPG). La peculiaridad de cada uno es que *en la generalización del patrón del proceso* (PPG) *los estudiantes se centran en las regularidades del proceso, mientras que en la generalización del patrón del resultado* (el RPG) *en las regularidades de los resultados* (p. 191). Además, como plantea Pedemonte (2007), los PPG *son requeridos para la construcción de una demostración de tipo inductivo.*

También nos basaremos en las ideas de *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* propuestas por Pedemonte (2007) y Pedemonte y Buchbinder (2011). Para ello, previamente, debemos introducir los conceptos de *argumentación constructiva y argumentación estructurante* (Pedemonte, 2007). La *argumentación constructiva* está constituida por los argumentos que contribuyen a la construcción de la conjetura, que pueden ser proporcionados por los *ejemplos genéricos*. La *argumentación estructurante* está formada por los argumentos que justifican la conjetura. Estos argumentos justificativos pueden aparecer a la vez que los constructivos (en este caso las dos argumentaciones son coincidentes) o posteriormente a ellos, una vez que la conjetura se considera un hecho, si la argumentación constructiva es insuficiente para proporcionar una prueba. Cuando los ejemplos genéricos se pueden generalizar fácilmente, pueden facilitar la elaboración de la *argumentación estructurante* y, como consecuencia de ello, la construcción de la prueba.

Una vez aclarados estos primeros conceptos explicaremos la idea de *Unidad cognoscitiva* (Pedemonte y Buchbinder, 2011). La unidad cognoscitiva se observa cuando hay una continuidad entre la *argumentación constructiva*, la *argumentación estructurante* y la prueba o demostración de la conjetura. Por último nos fijaremos en la *Continuidad estructural* (Pedemonte y Buchbinder, 2011). Esta idea se puede observar cuando la *argumentación* (constructiva o estructurante) *y la prueba tienen la misma estructura lógica*; es decir, *tienen las mismas conexiones lógicas entre sus proposiciones* (p. 259); es decir, son todas de tipo inductivo, deductivo o abductivo. La *continuidad estructural se observa si los ejemplos usados para construir y/o justificar la conjetura, se pueden generalizar para la construcción de la prueba* (p. 265). En este sentido, *... si la argumentación estructurante se basa en ejemplos genéricos, y tiene así una estructura deductiva, permite la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirvieron como puente entre la argumentación y la prueba permitiendo que la unidad cognoscitiva y la continuidad estructural se observaran* (p. 266). De ahí la importancia de los ejemplos de tipo genérico en el paso de la argumentación a la demostración.

En cuanto al tipo de pensamiento utilizado en la construcción de la prueba, tendremos en cuenta, además de los razonamientos demostrativos inductivo y deductivo, el razonamiento abductivo (Peirce, 1960): *La abducción como modelo de inferencia es usada en el proceso de descubrimiento, haciendo que, a partir de un hecho observado y suponiendo que ese hecho es condición necesaria para que se cumpla cierta hipótesis, entonces la hipótesis (de la implicación) es más creíble. En un razonamiento abductivo, la hipótesis es la conclusión de un razonamiento, teniendo este último un valor de plausibilidad al proporcionar mayor credibilidad para la hipótesis.* Este tipo de razonamiento fue modelado por Polya (1954, traducción española 1966) en sus *patrones de razonamiento plausible* en la forma:

$$A \Rightarrow \mathrm{B}$$

B es verdadera

A es más digna de crédito

El razonamiento anterior (Polya, 1954, p. 107; traducción española (1966), p. 283), denominado por Polya *patrón fundamental inductivo,* daría mayor credibilidad a la conjetura A, aunque no asegura su veracidad.

3. *CONTEXTO Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN*

La metodología de investigación se enmarca en la perspectiva *design research*, o *design studies* (Akker, 1999 y 2006), basada en iteraciones sucesivas o microciclos de investigación. Con ello se pretende validar a nivel local el diseño de intervención y obtener unos principios de diseño o declaraciones teóricas o declaraciones heurísticas sobre:

- La estructura y fases de los PIM desarrollados por los estudiantes.
- El papel e intervención del profesor: pautas, patrones y orientaciones para aumentar la eficacia de la intervención del profesor; interacción entre el estudiante y el profesor y consecuencias de ella en los conocimientos del profesor (conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido).
- Las tareas que realizan los estudiantes: identificación y caracterización de las mismas, dificultades que encuentran y procesos mentales que ponen en práctica.

La investigación se ha llevado a cabo con siete estudiantes de 2º de Bachillerato, en tres iteraciones puestas en práctica en años diferentes: la primera con una estudiante, la segunda con cinco y la tercera con una. En cada una de las experiencias, los estudiantes han desarrollado un PIM teniendo como punto de partida el problema que se presenta más abajo. El objetivo principal era que, con la resolución de los problemas de investigación que surgen en el PIM, los estudiantes establecieran conexiones entre el contexto del problema y las progresiones aritméticas tradicionales, para intentar generalizar estas últimas al espacio.

Cada estudiante, durante un periodo de cuatro meses, llevó a cabo su PIM, entregando periódicamente borradores de trabajo (cada dos o tres semanas) al profesor, para ser revisados y comentados. El profesor hacía comentarios escritos a cada uno de los borradores, teniendo en cuenta que su intervención se desarrollaba en tres vertientes: a) coordinación del proceso (orienta, sugiere, propone, etc.); b) control del proceso (analiza dificultades y propone salidas; evalúa el desarrollo y propone consolidar, revisar, modificar, etc.); c) evaluación del informe final. El estudiante, con los comentarios del profesor, prosigue el trabajo hasta la siguiente entrega. El papel del profesor se completa con la celebración de dos reuniones con el estudiante, una al principio del proceso para presentarle formalmente el PIM y otra al final para valorar globalmente los resultados.

Como resultado de cada PIM, los estudiantes elaboraron un informe personal, con unos contenidos aportados por el profesor en un guion al efecto, en el que describían todos los aspectos del PIM realizado: problema de investigación, objetivos o hipótesis iniciales, estado de la cuestión, metodología, resultados, conclusiones y bibliografía.

Para la presentación de este documento, se han seleccionado tres episodios sacados de uno de los informes elaborados por los estudiantes en su PIM, concretamente del de la estudiante P.I. (de la tercera iteración) en la parte que trabaja con ejemplos y contraejemplos intentando resolver el problema de investigación. Se han elegido los episodios de esta estudiante porque:

a) ella es la que más profundiza en el uso de ejemplos y contraejemplos a la hora de intentar demostrar los resultados, considerando su caso como el más representativo;

b) sus informes parciales son los que han propiciado una mayor interacción con el profesor, consiguiendo también que el análisis posterior de los episodios, por parte de este último, haya resultado muy fructífero, ya que se han obtenido los resultados presentados en este documento.

La codificación utilizada para la descripción de los documentos analizados, P.A.-06-P.I, que será utilizada a lo largo del documento, contiene tres valores: las dos primeras letras describen el tema de trabajo (P.A. significa progresiones aritméticas), el número de dos cifras representa el número de informe (06 es el informe nº 6 sobre este tema) y las dos últimas letras son las iniciales del nombre y primer apellido de la estudiante.

El problema inicial es el siguiente:

	74			
				186
		103		
0				

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

El problema de investigación, en el PIM del que se han extraído los episodios, es el siguiente: ***dados unos valores de la tabla, ¿en qué condiciones se puede completar de manera única?***

4. PRESENTACIÓN Y PRIMER ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS

El trabajo de la estudiante P.I., que tiene como objetivo la resolución del problema de investigación, tiene una parte que se desarrolla con ejemplos y contraejemplos, dando lugar a unos resultados (plasmados en el informe final) entre los que hemos elegido los episodios a analizar. En el episodio 1 se estudian algunos *ejemplos genéricos* que sirven para la construcción de demostraciones de existencia; en el episodio 2 se analiza el carácter de la información contenida en la estructura subyacente de algunos ejemplos genéricos; y en el episodio 3 se evidencian algunos razonamientos utilizados en la construcción de conjeturas modificadas a partir de otras anteriores.

4.1. Episodio 1. ¿Ejemplos para demostrar?

En este episodio, vamos a ejemplificar varias de las ideas presentadas anteriormente. Concretamente identificaremos la diferencia entre el caso particular general o abstracto, que se rige por un modo de argumentación deductivo y que, por tanto, si sirve para demostrar, y el caso particular concreto que, salvo para la construcción de contraejemplos, no sirve para demostrar.

Para ello analizaremos el documento P.A.-06-P.I. en la parte que intenta profundizar en una de las conjeturas más importantes del trabajo: *dados cuatro valores de la tabla, ¿siempre es posible completarla de forma única?* Concretamente analizaremos la pág. 6 del citado documento, donde la estudiante presenta unos casos muy interesantes, relacionados con el problema inicial. El episodio tiene varias partes y comienza de la manera siguiente:

Dados unos números a, b, c, d arbitrarios, ¿podemos construir un cuadrado de cualquier dimensión, o incluso un rectángulo, verificando que sus filas y columnas son progresiones aritméticas?

a+b	a+b+c+d
a	a+c

Fig. 15

Está claro que en esa situación (Fíg. 15) sí tiene contestación afirmativa la pregunta anterior. Además si a, b, c, d son enteros, entonces el cuadrado resulta de números enteros.

Como podemos observar, la estrategia de la estudiante, P.I., ha sido construir un caso particular que dé respuesta a la pregunta planteada. Además el ejemplo planteado permite a la estudiante presentar como trivial el hecho de que si esos valores son colocados en la tabla en filas y columnas consecutivas (que pueden ser las primeras), esos cuatro elementos nos permiten completar, de forma única, la tabla de números en su totalidad, sin más que ir añadiendo valores en la dirección que nos interese y teniendo en cuenta que la diferencia de dos consecutivos es la diferencia de la progresión aritmética correspondiente. Es decir, que para dar una respuesta justificada a la pregunta: *¿podemos construir un cuadrado...?,* vemos que basta con dar un ejemplo en el que ocurra. Lo mismo pasaría para preguntas del tipo: *¿existirá algo que cumpla..?, ¿se puede dar el caso...?* Para el caso propuesto por la estudiante, vemos que ha priorizado el uso de los valores *b, c* y *d* para que formen parte de las diferencias de las p.a. filas o columnas; concretamente *b* es la diferencia de la primera columna, *c* es la de la primera fila, *c+d* de la segunda fila y *b+d* de la segunda columna de la tabla.

Volviendo al caso analizado, resulta curioso que PI no haya resuelto la pregunta presentando la solución más sencilla, por ejemplo (Ejemplo 2A):

b	d
a	c

O mediante la solución que se obtiene a partir de la última colocación, en la que, repitiendo el procedimiento para interpolar medios aritméticos, podríamos completar las filas y columnas (Ejemplo 2B) :

b	...	...	...	...	d
...					...
...					...
a	...	...	...	...	c

Por tanto, es sencillo completar una tabla de las del problema inicial si conocemos cuatro elementos como los anteriores, situados en dos filas y dos columnas consecutivas, como en el primer ejemplo, o no consecutivas, como hemos propuesto en el último ejemplo.

Volviendo al desarrollo de la estudiante, vemos que ha demostrado el siguiente resultado: dados cuatro números cualesquiera, siempre podemos construir una tabla, de manera que los valores formen parte de ella y todas sus filas y columnas sean p.a. Además, la construcción nos permite asegurar que la tabla resultado no es única, sino que depende de las posiciones de los cuatro valores en la tabla; para cada posición elegida existirá una tabla como resultado.

Profundizando en el análisis de las características de los ejemplos anteriores, vemos que no se pueden encuadrar completamente en la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001), ya que, aunque tienen algunas coincidencias con ellos, también mantienen varias diferencias:

a) Ejemplifican una estructura general, abstracta, pero esa idea no está subyacente como en los *ejemplos genéricos* sino que aparece explícita en los ejemplos.

b) No *conectan el dominio aritmético con el algebraico*, sino que se mantienen en este último.

c) Tienen un carácter ambivalente. Son casos particulares de la tabla de números, pero no son ejemplos concretos, sino que representan una familia de casos (uno para cada cuarteto de valores de a, b, c, d). Si nos ceñimos al contexto: *lugares que ocupan los elementos en la tabla* o *posiciones de los elementos en la tabla,* y tomamos esta variable como criterio, entonces son casos particulares o *ejemplos genéricos;* pero en el contexto: *valores numéricos de los elementos de la tabla,* para este criterio, son casos generales, no son ejemplos concretos ni *genéricos.* Tenemos, por tanto, que son ejemplos particulares y generales a la vez, según el contexto en el que los situemos y el criterio con el que los analicemos.Surgen de este modo un tipo de ejemplos genéricos nuevos que denominaremos *ejemplo (o caso particular) de tipo general y genérico* (se amplía esta idea en el Episodio 3). Son casos particulares de una situación general, pero, a su vez, son casos generales de una idea más concreta; siempre expresarán explícitamente una idea abstracta y, por tanto, englobarán otros casos particulares que lo pueden concretar.

Una de las características de los tres *ejemplos de tipo general y genérico* vistos en el episodio es que configuran sendas demostraciones de existencia por construcción; es decir, que sirven para demostrar la veracidad de la conjetura planteada, a semejanza de lo que ocurre con los *ejemplos genéricos.*

Por otra parte, los tres ejemplos analizados representan sendos ejemplos de una *Generalización del Patrón de Proceso* (PPG) (Harel; 2001). En los tres casos que estamos analizando, para completar la tabla a partir de los cuatro elementos conocidos, se debe encontrar una idea procesual que permita ir generando los restantes elementos a partir de los elementos dados inicialmente. Esta idea es encontrada por la estudiante al centrar su búsqueda en el cálculo de las diferencias de cada una de las p.a. que componen las líneas (filas o columnas). Como de cada una de ellas conoce dos elementos, la cuestión es trivial. Es tan sencilla que la estudiante, una vez presentado el ejemplo, da por hecho que se puede completar la tabla y ni siquiera lo menciona.

Otra característica del proceso llevado a cabo por la estudiante es que podemos observar varias de las ideas propuestas por Pedemonte y Buchbinder (2011):

a) *Unidad cognoscitiva*. En nuestro caso, el ejemplo planteado por la estudiante es de tipo general (que lo hemos denominado *caso particular general genérico*) y sirve para la construcción de la prueba, (él mismo es parte esencial en la construcción de la conjetura y en su justificación).

b) *Continuidad estructural*. En el caso de la demostración de la estudiante, la argumentación y la prueba son de tipo deductivo (concretamente de existencia por construcción). En ellas, la construcción de un ejemplo sirve de argumentación estructurante para hacer verdadera la conjetura.

Episodio 2. La información contenida en la estructura subyacente de los ejemplos genéricos

Continuamos con el análisis del trabajo de la estudiante, que continúa en la página 7 del documento P.A.-06-P.I. Allí podemos leer:

Podemos poner cualquier valor con tal de que no sean redundantes o insuficientes, como por ejemplo:

2	4	6	8

Si nos dan estos cuatro valores, situados en la misma fila, no podríamos obtener el cuadrado [una tabla única], pues en definitiva sólo nos han dado dos valores independientes.

Como vemos, el refinamiento en la selección de ejemplos permite conseguir resultados interesantes: *las posiciones de los valores en la tabla condicionan la existencia o no de una tabla única a la que ellos pertenezcan.* Estamos ante un caso particular concreto (lo llamaremos Ejemplo 3); es decir, un *ejemplo genérico* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001) ya que lo realmente importante de él no son los valores numéricos particulares, sino la situación de ellos en la tabla; es decir, que contienen una *estructura subyacente* (la idea general o abstracta de la que el ejemplo es un caso particular) que es la siguiente: tenemos cuatro elementos consecutivos de una misma línea. Este ejemplo genérico, a modo de contraejemplo, sirve para demostrar la falsedad de la conjetura: *dados cuatro elementos cualesquiera de la tabla, siempre se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.*

Resulta muy ilustrativo el uso que hace la estudiante de las ideas de *valores redundantes, insuficientes o contradictorios;* es decir, para completar de forma única una línea de la tabla, basta con conocer dos elementos cualesquiera de ella. Conocer más de dos implica que hay información redundante o contradictoria, conocer menos de dos significa que la información es insuficiente.

Por esta causa, en el ejemplo genérico anterior, observamos que la información es redundante; es decir, podemos considerar dos cualesquiera de los elementos dados *independientes* y los demás los podemos deducir de esos dos. Esta idea general o *estructura subyacente,* descubierta por la estudiante en el ejemplo, es la que sirve para argumentar y demostrar que, en los casos análogos a ese, se puede completar la tabla, pero no de forma única. Todo ello refuerza la importancia de los ejemplos genéricos.

La importancia de un ejemplo genérico proviene de su capacidad de conectar los dominios aritméticos y algebraicos. Esta conexión apoya la unidad cognoscitiva porque un ejemplo usado en la argumentación se puede generalizar a través de la representación algebraica en la prueba. Esto es porque las reglas usadas para los ejemplos, y particularmente para los ejemplos genéricos, se pueden generalizar en el dominio algebraico.

De ahí que parezca natural empezar a pensar que los elementos deban estar en filas y columnas diferentes, para ver si así son *independientes* y nos permiten completar la tabla de forma única, como ocurría en el problema inicial. Esta es la idea que se resalta en el siguiente episodio, desarrollado en las dos o tres semanas siguientes.

4.2. Episodio 3. El papel de la modificación de conjeturas en los razonamientos

Por todo lo anterior, P.I. modifica la conjetura y la transforma en: *sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.*

Como la demostración de esta conjetura conlleva unas *formas de expresión* que se salen del *alcance conceptual* de la estudiante, vuelve a tomar un caso particular general de la misma, para ver si obtiene algún resultado interesante. Ello aparece en las páginas 9-10 del documento P.A.-06-P.I.:

Vamos a tratar una variante del problema, de forma general:

Si tenemos cuatro elementos conocidos, situados como en la figura siguiente, ¿hay solución para el cuadro aritmético?

			d
		c	
	b		
a			

Tenemos que demostrar que existen las diferencias v_1, v_2, h_1 de las correspondientes p.a. fila [fila primera: h_1] o p.a. columnas [columnas primera: v_1; columna segunda: v_2].

Se cumple que las diferencias de las filas son: h_1, $h_1+(v_2-v_1)$, $h_1+2(v_2-v_1)$, $h_1+3(v_2-v_1)$.

[Podemos poner $h_2 = h_1 + (v_2 - v_1)$ pues se cumple que $b = a + h_1 + v_2 = a + v_1 + h_2$, simplificando se tiene $h_1 + v_2 = h_2 + v_1$ o lo que igual: $h_2 - h_1 = v_2 - v_1$. Por tanto $v_2 - v_1 = h_2 - h_1$. Luego $h_2 = h_1 + (v_2 - v_1) = h_1 + (h_2 - h_1) = h_2$] (Este párrafo aparece como una nota a pie de página en el original)

Además: $a + v_2 + h_1 = b$; $a + 2v_1 + 2(h_1 + 2(v_2 - v_1)) = c$; $a + 3v_1 + 3(h_1 + 3(v_2 - v_1)) = d$. Operando y ordenando tenemos:

$h_1 + v_2 = b - a$; $h_1 - 2v_1 + 4v_2 = c - a$;$3h_1 - 6v_1 + 9v_2 = d - a$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Analicemos el rango de la matriz del sistema y la ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 2 & -2 & 4 & c-a \\ 3 & -6 & 9 & d-a \end{pmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & 2 & c-2b+a \\ 0 & 0 & 0 & d-3b+2a-3(c-2b+a) \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema no tendrá solución si

$$d - 3b + 2a - 3c + 6b - 3a = -a + 3b - 3c + d \neq 0.$$

O lo que es lo mismo $3b + d \neq a + 3c$. Vamos a presentar un ejemplo de cada situación. [...]

El planteamiento de fondo de la estudiante en este episodio es un intento más de contrastar la veracidad o no de la conjetura enunciada al principio de este episodio: *sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a*. Para ello analiza otro *caso particular general* (lo denominaremos como Ejemplo 4) y, si el resultado es el adecuado, lo utiliza posteriormente para refutar la conjetura.

Sin detenernos a comentar la originalidad del planteamiento de la estudiante, que se apoya en varias incógnitas auxiliares no explícitas en el enunciado del problema, podemos observar cómo P.I., a partir de este *caso particular general*, presenta, en P.A.-06-P.I.-P10, dos casos particulares o ejemplos concretos, aparentemente parecidos, uno de ellos (para a=1, b=2, c=3, d=4) con varias soluciones, de las que presenta dos (ejemplos 5 y 6), y el otro sin solución (para a=1, b=2, c=4, d=3) (Ejemplo 7):

			4
		3	
	2		
1			

7	6	5	4
5	4	3	2
3	2	1	0
1	0	-1	-2

Ejemplo 5

22	16	10	4
15	9	3	-3
8	2	-4	-10
1	-5	-11	-17

Ejemplo 6

			3
		4	
	2		
1			

Ejemplo 7

Estos resultados permiten a P.I. demostrar la falsedad de una de las conjeturas principales del trabajo: *si tenemos cuatro valores conocidos de una tabla, situados en diferentes filas y columnas* (es decir, que tomados dos cualesquiera de ellos no están ni en la misma fila ni en la misma columna) *entonces podemos completar la tabla de forma única,* como en el problema inicial. Además, demuestra que las tablas análogas a la de los datos *a, b, c, d*, o no tienen solución o, si la tienen, ésta no es única.

Volviendo a la demostración, vemos que la estudiante vuelve a utilizar, como en el Episodio 4.1, la Generalización de Patrones de Proceso (PPG) (Pedemonte; 2007) que *son requeridos para la construcción de la demostración* de una conjetura que resulta al generalizar un propiedad que se da en ejemplos numéricos. En este caso los *patrones de proceso* son:

- Las diferencias de la p.a. filas o columnas, que juegan un papel muy importante en la demostración, por un lado porque son los valores a determinar y, por otro porque son los que permiten generar elementos en la tabla, de manera gradual y sin contradicciones.
- Las propiedades que relacionan las diferencias de las p.a. filas y las p.a. columnas. Téngase en cuenta que la sucesión de diferencias de las filas (h_i) y la sucesión de las diferencias de las columnas (v_i) forman, respectivamente, nuevas p.a. con la peculiaridad de tener la misma diferencia (h_i-h_{i-1}=v_i-v_{i-1})

Estos patrones son los que permiten a la estudiante construir una demostración deductiva, de carácter algebraico, que termina con la discusión de la naturaleza de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que puede ser de cualquier tipo excepto compatible determinado. Ella lo ejemplifica con un ejemplo concreto de cada tipo (que aparecen más arriba: ejemplos 5, 6 y 7).

Así mismo ocurre que la *argumentación estructurante* (la que justifica la conjetura basándose en los patrones de proceso) y la prueba (basada en el uso del lenguaje de tipo algebraico): a) tienen la misma estructura lógica, (cadena de razonamientos de tipo deductivo); b) conservan una continuidad en los contenidos (los ejemplos generales genéricos que nos han permitido generalizar y construir la prueba) Todo ello nos permite observar (Pedemonte y Buchbinder; 2011) la *continuidad estructural.*

5. *DISCUSIÓN CONJUNTA DE LOS EPISODIOS. PRIMEROS RESULTADOS*

Prosiguiendo el análisis, se presenta a continuación la discusión conjunta de los tres episodios, lo que ha permitido la identificación de algunas ideas nuevas que complementan el marco teórico.

En primer lugar, si se recopilan las conjeturas que han ido apareciendo en los tres episodios, se obtienen las siguientes:

C0: *Dados cuatro valores cualesquiera situados en la tabla, siempre es posible completarla de forma única, de manera que sus filas y sus columnas formen p.a..*

C1: *Dados cuatro valores de la tabla, situados en una misma línea (fila o columna), se puede completar la tabla de forma única.*

C2: *Dados cuatro valores conocidos de la tabla, por ejemplo los siguientes:* $a_{i,j}, a_{i+p,j}, a_{i,j+q}, a_{i+p,j+q,}$ *(siendo i, i+p las filas i-ésima e (i+p)-ésima; j, j+q las columnas j-ésima y (j+q)-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.*

C2.1: *Dados cuatro valores de la tabla,* $a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1,}$ *(siendo i la fila i-ésima y j la columna j-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.*

C3: *Si conocemos cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos están en filas y columnas diferentes; en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.*

C3.1: *Dada la tabla con elementos conocidos:*

$$a = a_{i,j},\ \ b = a_{i+1,j+1},\ \ c = a_{i+2,j+2},\ \ d = \ a_{i+3,j+3}$$

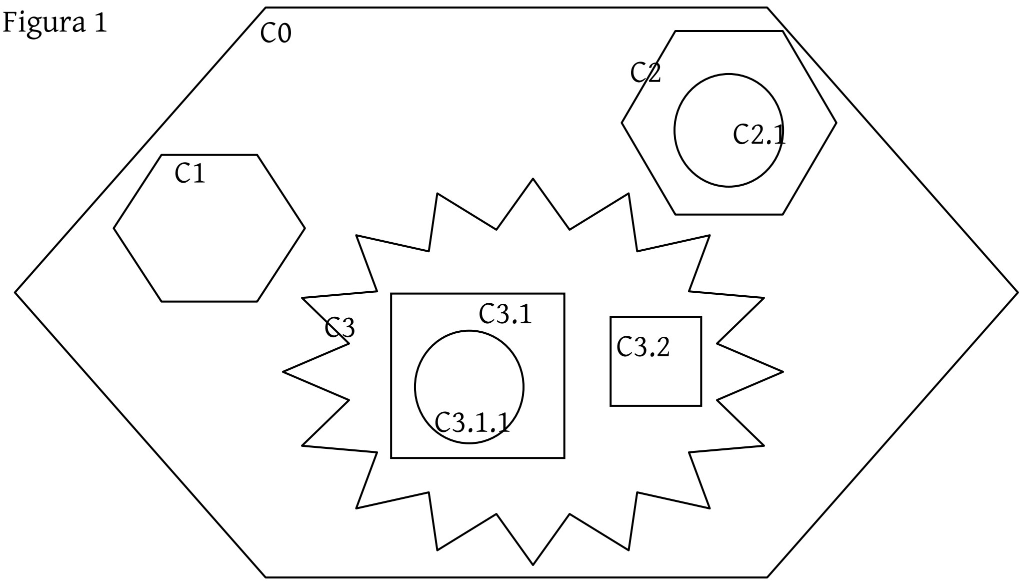
(colocados respectivamente en filas y columnas consecutivas); en estas condiciones, podemos completar la tabla de forma única.

C3.1.1: *Con las condiciones de C3.1, si a=1, b=2, c=3, d=4, entonces la tabla se puede completar de más de una manera. Si a=1, b=2, c=4, d=3, entonces la tabla no se puede completar.*

C3.2: *El problema inicial tiene solución.*

Para visualizar las conexiones existentes entre las conjeturas anteriores, en relación con el problema, se ha construido la figura 1, en la que se sitúan todas ellas. Con el fin de resaltar la dificultad de la conjetura C3, ésta se ha representado por un polígono cóncavo con muchos lados, en forma de estrella con muchas puntas. Las demás conjeturas se han presentado por medio de polígonos regulares convexos, para denotar que son más manejables, o por circunferencias, para denotar que ya está están verificadas o refutadas.

Figura 1



Como se puede observar en la Figura 1 y en los anteriores enunciados, las conjeturas C1, C2 y C3 son casos particulares de tipo general de la conjetura C0; la conjetura C2.1 es un caso particular de tipo general de C2; las conjeturas C3.1 y C3.2 son casos particulares, de tipo general y concreto respectivamente, de la conjetura C3, y la conjetura C3.1.1 es un caso particular concreto de la C3.1.

Por tanto, se tiene que la falsedad de C1 sirve como contraejemplo (ya que es un caso particular) para demostrar la falsedad de C0, pero la veracidad de C2 lleva a pensar en la posibilidad de que C0 pueda dar lugar a una conjetura cierta modificando alguna de sus condiciones.

Por otra parte, la veracidad de C3.1.1 como contraejemplo (caso particular concreto) lleva a la falsedad de C3.1 y la falsedad de esta última sirve de contraejemplo, como caso particular general, para demostrar la falsedad de C3.

Se tiene que C3 es falsa. A su vez, la existencia de solución en el problema inicial es equivalente a que C3.2 es verdadera. En estas condiciones, a partir de C3.2 se podría intentar construir una nueva conjetura C que verificara $C \Rightarrow C3.2$, de forma que, utilizando el razonamiento abductivo (Peirce, 1960), modelado en forma de *razonamiento plausible* y denominado *patrón fundamental inductivo* (Polya, 1954 y 1966 (traducción española)) en la forma:

$$C \Rightarrow C3.2$$

C3.2 es verdadera

C es más digna de crédito

Por tanto, el análisis efectuado con las conjeturas confirma la importancia de los ejemplos en el proceso de elaboración de conjeturas y en el de construcción de la prueba (primera pregunta de investigación).

En segundo lugar, se ha podido comprobar que los niveles de concreción o de generalidad de un ejemplo pueden jugar un importante papel a la hora de plantear argumentos válidos y evidencias completas en la construcción de conjeturas y en su demostración. Esos niveles de concreción o de generalidad vienen dados y están condicionados por el contexto y el criterio elegido a la hora de plantear el ejemplo. En el caso estudiado, permite asegurar la existencia de ejemplos genéricos no contemplados hasta ahora. Se propone una categorización de los ejemplos, intentando englobar a todos ellos:

$$Ejemplos\ o\ Casos\ particulares \begin{cases} Concretos \begin{cases} No\ genéricos\ (ECNG) \\ \\ Genéricos\ (ECG) \end{cases} \\ \\ Generales \begin{cases} No\ genéricos\ (EGNG) \\ \\ Genéricos\ (EGG) \end{cases} \end{cases}$$

Una vez fijado el contexto o contextos en los que se van a construir los ejemplos y el criterio/s o aspecto/s que vamos a valorar, se puede señalar que la diferencia entre concretos y generales radica en que los primeros vienen dados mediante valores concretos del aspecto/s a valorar (valores o coeficientes numéricos, etc.) y los segundos por valores abstractos de alguno de los criterios que se valoran (con valores literales); cada ejemplo general representa a una familia de ejemplos concretos que obtenemos al dar valores a los elementos del ejemplo general. Por otra parte, recordando que la diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que se puede observar si se dejan a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa.

En el problema inicial que origina el trabajo de la estudiante, se pueden considerar al menos dos criterios a la hora de construir ejemplos: *valores de los elementos de la tabla* y *posiciones de los elementos en la tabla*. Se tienen varias posibilidades a la hora de construir ejemplos:

4	2		
1	5		

Ejemplo A

1			
			4
	2		
		3	

Ejemplo B

c	d		
a	b		

Ejemplo C

a			
			d
	b		
		c	

Ejemplo D

En la siguiente tabla se clasifican estos ejemplos, en función del criterio o el contexto elegido:

CRITERIO O CONTEXTO	EJEMPLO A	EJEMPLO B	EJEMPLO C	EJEMPLO D
POSICIONES DE LOS ELEMENTOS EN LA TABLA.	ECG	ECNG	ECG	ECNG
VALORES DE LOS ELEMENTOS DE LA TABLA	ECG	ECNG	EGG	EGNG

Las anteriores ideas, sobre la naturaleza de los ejemplos, completan el marco teórico descrito inicialmente con la idea de *ejemplo genérico general*, en un contexto en el que haya varios criterios de clasificación, en el que los ejemplos pueden tener un carácter ambivalente. También proporcionan una posible respuesta a la primera pregunta de investigación profundizando en la importancia del papel de los ejemplos en la construcción de la prueba.

6. *PRINCIPIOS DE INTERVENCIÓN Y CONCLUSIONES*

Del análisis anterior se pueden extraer varias conclusiones que constituyen principios de intervención para el profesor en el trabajo con ejemplos y casos particulares. Estos también forman parte de la respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

En primer lugar, el profesor, a la hora de plantearse procesos de demostración a partir de conjeturas propiciadas por ejemplos, debe tener en cuenta algunas reglas de lógica demostrativa:

1. Todo ejemplo (*concreto o general*) puede ser usado como un contraejemplo para demostrar la falsedad de una conjetura que implique ese caso particular. Téngase en cuenta, como aparece en Stylianides y Ball (2008), que esto equivale a la utilización de la *regla lógica de contraposición.*

2. Un *ejemplo concreto* puede ser usado como contraejemplo para demostrar la falsedad de un *ejemplo general*.

3. En el trabajo con conjeturas se debe tener en cuenta, cuando aparezca, el siguiente patrón de razonamiento demostrativo que se presenta a continuación:

Sean $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, …, $\mathbf{C}_{n-1}$ conjeturas en las que cada una (excepto la primera) es un caso particular de la anterior (véase la Figura 2 en la que se representan las conjeturas por polígonos cóncavos, hasta llegar a un polígono convexo, que representa una conjetura más manejable y, finalmente una circunferencia, que representan la conjetura que se ha podido demostrar o refutar). Es decir, $\mathbf{C}_i$ es un caso particular de $\mathbf{C}_{i-1}$, para i=n-1, n-2, …, 2; o dicho de otra manera, $C_i \Rightarrow C_{i+1}\ , \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$ En estas condiciones, si $\mathbf{C}_n$ es un contraejemplo (caso particular general o concreto) que demuestra la falsedad de $\mathbf{C}_{n-1}$, entonces también son falsas todas las conjeturas $\mathbf{C}_i$, i=1, 2, …, n-1.

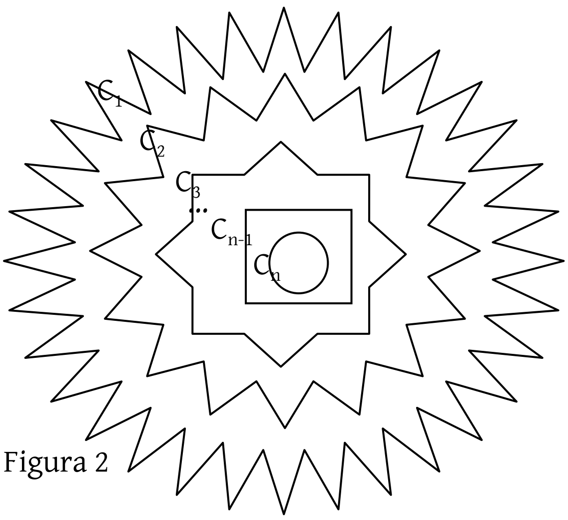


Figura 2

El silogismo anterior es un razonamiento lógico (ya conocido) que, usado en un contexto de ejemplos, adquiere mucho valor, porque sirve para demostrar resultados de existencia o para refutar, si los ejemplos los usamos como contraejemplos. Pero es posible porque estos ejemplos en un contexto son concretos (y sirven para demostrar, por refutación, como contraejemplos en razonamientos empíricos) y en otro contexto son generales (y sirven para demostrar dentro de razonamientos deductivos).

4. Así mismo, se ha identificado un *patrón de razonamiento plausible* (Polya, 1966, p. 281-341), que constituye una variante del presentado por Polya (1966) y que podemos enunciar de la siguiente manera:

Sean C, C_1, C_2, ..., C_n conjeturas, de tal forma que se cumple que $C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \dots, n$. Supongamos que C_1 es falsa y que C_2, C_3, ..., C_n son verdaderas. Construimos otra conjetura D, modificando las condiciones de C, acercándolas a las de alguna de las $C_i\ ,\ i = 2, \dots, n$; de forma que $D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$. Con estas condiciones, se cumple que C es falsa y D es *un poco (o mucho) más digna de crédito, en función de las semejanzas (o diferencias) que existan entre* C_2, C_3, ..., C_n. Este razonamiento abductivo (Peirce, 1960) lo podemos modelar de manera análoga a como hace Polya (1954, 1966(traducción española)) en sus patrones de razonamiento plausible:

$$C \Rightarrow C_i\ , \forall i = 1, 2, \dots, n$$

C_1 es falsa

$C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$ son verdaderas y semejantes (ó diferentes) entre sí

$$D \Rightarrow C_i\ , \forall i = 2, 3, \dots, n$$

C es falsa y D es más (ó mucho más) digna de crédito

Por tanto, el análisis realizado esto ha permitido identificar una variante de uno de los patrones de razonamiento plausible de Polya, lo que permite completar el marco teórico, obteniendo una respuesta a la segunda pregunta de investigación planteada: el análisis de las producciones de los estudiantes produce interacciones con los conocimientos pedagógicos de contenido del profesor, en este caso sobre el papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de un prueba a partir de la conjeturas formuladas (primera y segunda preguntas de investigación planteadas al inicio del documento).

Por otra parte, en el proceso de demostración de conjeturas se ha observado que:

5. Los ejemplos pueden ser concretos o generales, *genéricos* o no genéricos, en función del contexto o del criterio con el que los construyamos. Un ejemplo puede ser concreto en un contexto y general en otro.

6. El análisis refuerza las ideas de Masón y Pimm (1984), Balacheff (1988) y Harel (2001): los *ejemplos genéricos* son eficaces para la *generalización de patrones de proceso* y pueden contribuir a que las *argumentaciones constructiva* y *estructurante* tengan la misma estructura y utilicen los mismos contenidos que la prueba, lo que permite observar *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* en el proceso de construcción y justificación de la conjetura.

7. REFERENCIAS

- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élevès de College*. Tesis Doctoral. Universidad Joseph Fourier. Grenoble.

- Ball, D. B; Hoover Thames M. H.; Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* Vol. 59, nº 5, pág. 389-407.

- Bocyl, (2007). DECRETO 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Publicado con fecha 23-05-07.

- Bocyl, (2008). DECRETO 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Publicado con fecha 11-06-08.

- Brown, J.; Edwards, I.; Galbraith, P.; Stillman, G. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. En J. Watson & K. Beswick (Edit) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* p. 688-697. MERGA, Inc.

- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. En A. Orton y G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). Cassell, Londres.

- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. En S. Campbell & R. Zazkis (Eds.): *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185–212). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

- Mason, J., Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. En *Educational Studies in Mathematics*, nº 15, pág. 227–289.

- Mason, J. (2002). Minding Your Qs and Rs: effective questioning and responding in the mathematics classroom. En L. Haggerty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, RoutledgeFalmer, London, pág. 248- 258.

- Mason, J. (2003). Structure of attention in the learning of mathematics. En J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching*, pág. 9-16. Prague: Charles University.

- Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routledge Falmer.

- McKenney, S.; Nieveen, N. y Van den Akker,J. (2006). Design research from a curriculum perspective. En: Van den Akker, J.; Gravemeijer, K; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). *Educational design research.* Pág 62-90 London: Routledge.

- Pedemonte, B (2007). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. En Pitta-Pantazi, D & Philippou, G (Edit) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5).* Páginas 643-652. Larnaca, Cyprus.

- Pedemonte, B., Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. En *ZDM Mathematics Education* nº 43, pág 257–267.

- Peirce C. S. (1960): *Collected papers* Cambridge, M A: Harvard University Press.

- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Edit. University Press, New Jersey. Existe traducción al castellano en 1966: *Matemáticas y razonamiento plausible.* Edit. Tecnos, Madrid.

- Shriki, A. (2008). Assisting teachers to develop their students'creativity in mathematics– implementing the "what-if-not?" strategy. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord). *Simposium 2: Mathematical creativity and giftedness in secondary school*) *CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Math and the Education of Gifted students.* Pág. 408-410. Haifa,Israel.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

- Stylianides, A., y Ball, D.L., (2008). Studying the mathematical knowledge for teaching: the case of teachers' knowledge of reasoning and proof . En: *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA.

- Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. En Van den Akker, J.; Branch, R.M.; Gustafson, K.; Nieveen, N.; y Plom, T. (Eds): *Design approaches antools in education and training.* Pag.1-14. Boston: Kluwer Academic.

- Van den Akker, J.; Gravemeijer, K.; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). (2006). *Educational design research.* London: Routledge.

- Wademan, M. (2005). Utilizing Development Research to Guide People Capability Maturity Model Adoption considerations. Tesis Doctoral, Universidad de Syracuse (New York, USA).

- Yin, R.K. (2003). Case study research: design and methods. Newbury Par (CA, USA): Sage–Applied Social Research Methods Series, volume 5.

ANEXO 8

DOCUMENTO RA-AB

REDES ARITMÉTICAS

ÍNDICE

1._ INTRODUCCIÓN

1.1._ ¿POR QUÉ?

Este proyecto surge a partir de una propuesta de nuestro coordinador, que ya había trabajado con progresiones aritméticas, para la resolución de uno de los problemas iniciales. Comprobamos que el problema prometía y decidimos trabajarlo más a fondo. A continuación presentamos los resultados de nuestro trabajo de investigación.

1.2._ ¿PARA QUÉ?

Partimos de unas hipótesis iniciales que son:

1. Las tablas bidimensionales la p.a. siguen un comportamiento en el que aparecen patrones que se pueden expresar matemáticamente.
2. Los planteamientos con redes y p.a. se pueden extrapolar a otros tipos de tablas y a otro tipo de progresiones.
3. Algún aspecto de las p.a. tradicionales se puede generalizar en las redes bidimensionales, tridimensionales, etc.

Con el planteamiento de este proyecto nos proponemos ciertos objetivos que queremos conseguir y que presentamos a continuación:

1. Profundizar en las ideas teóricas de lo que es una progresión en un contexto diferente al tradicional (el espacio).
2. Resolver unos problemas que no hemos encontrado fuera de este proyecto.
3. Comprobar si lo que sabemos acerca de las progresiones aritméticas se puede expresar en el espacio.
4. Generalizar el tipo de figura y de progresión.

1.3._ ¿QUÉ HAY DE ESTO?

El tema aquí propuesto, progresiones aritméticas y, en menor medida, geométricas, ha sido objeto de estudio desde hace muchos siglos. Numerosas narraciones a modo de leyendas nos dan cuenta de ello, como la que nos cuenta las hazañas de un joven alemán llamado Carl Friedrich Gauss que, siendo niño, descubrió la fórmula para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética. Daba así respuesta a la tarea que su profesor le pidió: hallar la suma de los 100 primeros números. Otras, como la del inventor del ajedrez, han enriquecido a aquellos que dominaban los conceptos matemáticos. Aquél pidió como recompensa por su invento al rey de un país de oriente un grano de trigo por el primer escaque, dos por el segundo, y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada vez. Aunque al rey le pareciera más bien escasa la recompensa, se trataba de una cantidad de trigo superior a la producción anual de grano de este reino.

En el campo concreto de las progresiones en redes poligonales de más de una dimensión, la investigación y estudios es muy escasa. Lo único que conocemos es un artículo de nuestro coordinador, Constantino de la Fuente, en colaboración con la alumna Priscila Ramos de 2º de Bachillerato publicado en la revista *Sigma*, número 32. En éste, se define, entre otros conceptos la *diferencia de Priscila:* las diferencias correspondientes a las p.a. que forman las filas y las que forman las columnas, también forman progresiones aritméticas. Puede consultarse este artículo en la bibliografía.

Además, hemos considerado oportuno incluir en el trabajo la resolución de un problema de la olimpiada de matemáticas de bachillerato en la fase local de 2004, debido a su parecido con el problema que hemos tratado. Su enunciado es el siguiente:

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

1.4._ METODOLOGÍA Y NOTACIÓN

Para la elaboración de este proyecto hemos seguido los siguientes pasos:

1. Resolución de los problemas iniciales.
2. Planteamiento preguntas generales.
3. Resolución de las preguntas generales a través de estudio de casos, demostraciones matemáticas, estudio de casos particulares, introducción de cambios de las variables, utilización de analogías, etc.
4. Establecimiento de resultados y conclusiones.

En cuanto a la notación, en el trabajo utilizamos una notación singular; en el número $a\,(n, m)$, entendemos que n es la fila enésima empezando a contar desde abajo y m es la columna enésima comenzando a contar desde la izquierda.

Por último queríamos señalar que, como algunas fórmulas son muy largas, añadiremos un anexo al final del trabajo con las fórmulas ampliadas, para su mejor lectura.

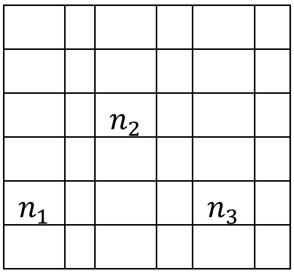
4._ POSIBLE COMPLECIÓN DE UNA TABLA 2D. ESTUDIO DE CASOS

4.1._ Teorema 5: *Dados tres elementos conocidos en una tabla, en estas condiciones la tabla se puede completar de más de una manera y no se puede completar de forma única.*

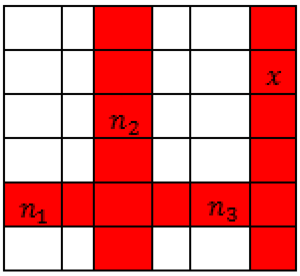
Nos proponemos demostrarlo a continuación:

Los únicos casos relevantes serían dos:

4.1.1._ CASO 1. DOS DE ELLOS SE ENCUENTRAN EN LA MISMA LÍNEA.



- En este caso, podremos completar la p.a. en la que se encuentran los dos elementos; a la que llamaremos pa_1.
- En un segundo paso, solucionaremos la p.a. perpendicular a pa_1 y que pasa por el tercer elemento. A esta p.a. la llamaremos pa_2.
- Dado cualquier otro elemento de valor desconocido (x), siempre podremos plantear otra p.a., paralela a pa_2, que pasa por el elemento desconocido (expresada en función de x) a la que llamaremos pa_3. Las p.a. resueltas aparecen coloreadas en la figura 12:



Ahora bien,

- pa_1 podría verse como una p.a. obtenida a partir de pa_2 y pa_3, figura 13, por lo que nos encontraríamos con una tabla en la que conocemos dos progresiones paralelas (una de ellas en función de x).
- Además, las dos progresiones aritméticas paralelas podrían representarse mediante dos valores de la línea en la que se encuentran. Escojamos dos de cada una, pa_2 y pa_3, que a su vez estén en las mismas filas (casillas en rojo):

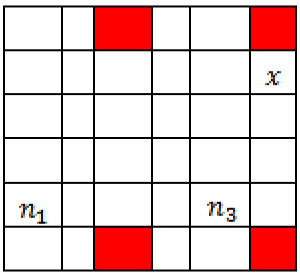
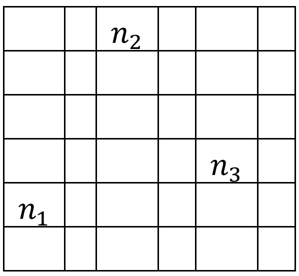


Figura 13

Partiendo de esta situación, sacamos dos conclusiones:

- Como los cuatro elementos se encuentran formando un rectángulo, sólo vamos a poder obtener un valor para cada casilla de la tabla.
- Al estar dos de las casillas expresadas en función de x, es decir, aquellas que se encuentran en pa_3, todos los valores que obtengamos al rellenar la tabla estarán también expresados en función de x. La tabla tendrá, por tanto, soluciones diferentes según el valor que se dé a la x.



4.1.2._ CASO 2. NINGUNO COMPARTE FILA O COLUMNA.

- Situaremos el elemento de valor desconocido (x) en la misma línea que n_1, por lo que la p.a. formada (pa_1), estará expresada en función de x.
- Completaremos las p.a. perpendiculares a pa_1 y que pasen por el segundo y tercer elemento, pa_2 y pa_3, respectivamente. Todas las p.a. estarán expresadas en función de x.

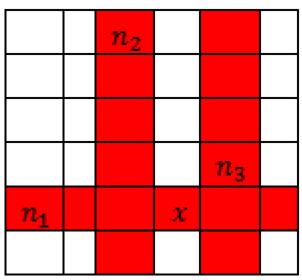


Figura 14

La situación que nos encontraríamos viene representada en la figura 14:

El razonamiento a partir de ahora será muy similar al anterior, con la única excepción de que las dos p.a. paralelas están expresadas en función de x.

Aunque el siguiente apartado se pueda solucionar con un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, hemos preferido buscar un camino, que nos llevara a la misma solución, con el empleo de una sola incógnita.

4.2._ Teorema 6: *la condición suficiente y necesaria para que una tabla con cuatro elementos conocidos con coordenadas (a,b), (c,d), (e,f), (g,h) se pueda completar de forma única, es que se cumpla una de las fórmulas expuestas.*

$$(c-a)(h-d)(g-e)(b-f)+(b-d)(e-a)(h-f)(e-c)\neq 0$$

O bien:

$$\frac{(c-a)(e-g)}{d-b}+\frac{(e-a)(g-c)}{f-b}\neq\frac{(g-a)(e-c)}{h-b}$$

Para demostrar la tesis de este resultado, nos gustaría presentar el razonamiento que vamos a seguir en la demostración mediante un ejemplo.

Sea una tabla con cuatro valores iniciales escritos en negrita, consideremos x el valor de una casilla, en este caso la que ocupa las coordenadas (2,1). Tras completar diversas p.a., a partir del método de resolución expuesto en el apartado 2.2, llegaremos a una casilla en la que encontramos dos expresiones distintas. Igualamos las dos expresiones y obtenemos que el valor de x es igual a 13.

$4x$				
$3x$	**74**	$148-3x$	$222-6x$	$296-9x$
$2x$				**186**
x	$\frac{110+x}{2}$	**103**	$\frac{309-x}{2}$	$76+9x$ ó $206-x$
0				

52	82	112	142	172
39	74	109	144	179
26	66	106	146	186
13	58	103	148	193
0	50	100	150	200

Consideremos ahora la misma tabla pero con valores iniciales diferentes, obtenidos a partir de la resolución anterior. Siendo x el valor de una casilla (5,3), completaremos todas aquellas p.a. en las que encontremos dos elementos hasta rellenar toda la tabla.

		x	142	
				179
13				
	50			

$3x-284$	$2x-142$	x	142	$284-x$
$2x-185$	$\frac{3x-188}{2}$	$x-3$	$\frac{x+176}{2}$	179
$x-86$	$x-46$	$x-6$	$x+34$	$x+74$
13	$\frac{x+4}{2}$	$x-9$	$\frac{3x-40}{2}$	$2x-31$
$-x+112$	50	$x-12$	$2x-74$	$3x-136$

A diferencia del primer caso, en esta resolución, **cada casilla adopta una única expresión**. Por lo tanto, **no hay forma de plantear una ecuación** donde hallar el valor de la incógnita. Es por eso que la tabla tendrá tantas soluciones como valores se pueda dar a la x.

Procederemos entonces a explicar las dos fórmulas:

- Demostración del teorema cuatro para la fórmula $(c-a)(h-d)(g-e)(b-f)+(b-d)(e-a)(h-f)(e-c)=0$

Para obtener la fórmula anterior, hemos seguido los siguientes pasos:

➢ Calcular a partir de los tres números que ocupan las filas inferiores $(n_{a,b}, n_{c,d}, n_{e,f})$, siendo a<c<e, y un elemento desconocido (x) situado en las coordenadas $(a+1,b)$, el valor de la casilla que ocupa el cuarto número (g,h).

➢ Igualar la expresión obtenida anteriormente (expresado en función de x) con el elemento que el enunciado da para esa misma casilla (g, h).

Antes de pasar a la resolución numérica, nos gustaría aclarar que los únicos parámetros que consideraremos serán los coeficientes de la incógnita. Esto es debido a que, en una ecuación lineal el coeficiente de la incógnita es el que determina si la ecuación tiene solución única (el coeficiente de la incógnita es distinto de 0), o infinitas o ninguna solución (el coeficiente de la incógnita es igual a 0). Como lo que nos pregunta el enunciado es si la tabla tiene o no solución única, no hacemos distinción entre tablas con infinitas soluciones o ninguna solución. Si se quisiera averiguar, habría que tener en cuenta los términos independientes (el elemento que ocupa la casilla con coordenadas (g, h), y el elemento obtenido para esa misma casilla a partir de los otros tres elementos conocidos).

En la **tabla** hemos representado los coeficientes del elemento desconocido en determinadas casillas, que nos permitan calcular la expresión para la casilla con coordenadas (g, h) en función del elemento desconocido. Debajo, presentamos la expresión que corresponde con el coeficiente de la incógnita en la casilla (g, h). **Está negado de cero?**, porque como hemos explicado antes, para que la tabla tenga solución única, el coeficiente de la incógnita en la casilla ocupada por el cuarto número, no puede ser 0.

$sumando\ cte = \frac{e-a}{b-f}$ →

$sumando\ cte = \frac{c-a}{b-d}$ →

							$n\,(g,h)$		
	$n\,(e,f)$			$e-a$			$\frac{(e-a)(h-f)}{b-f}$		
$n\,(c,d)$				$c-a$			$\frac{(c-a)(h-d)}{b-d}$		
				1					
				$n\,(a,b)$					

$$\frac{(c-a)(h-d)}{b-d} + \left\{\frac{(e-a)(h-f)}{b-f} - \frac{(c-a)(h-d)}{b-d}\right\}\frac{g-c}{e-c} \neq 0 \equiv (c-a)(h-d)(g-e)(b-f) + (b-d)(e-a)(h-f)(e-c) \neq 0$$

- Demostración del teorema cuatro para la fórmula $\frac{(c-a)(e-g)}{d-b} + \frac{(e-a)(g-c)}{f-b} \neq \frac{(g-a)(e-c)}{h-b}$

Antes de empezar con la demostración, queríamos recordar el concepto de "Diferencia de Priscila", obtenida en de la Fuente y Ramos (2008): "las diferencias correspondientes a las p.a. que forman las filas y las que forman las columnas, también forman progresiones aritméticas", propiedad en la que vamos a basar este método.

Procederemos a calcular en la **figura** las diferencias de las progresiones que corresponden con las filas donde se sitúan $n_2\,(c,d)$, $n_3\,(e,f)$, $n_4\,(g,h)$, a partir de $n_1\,(a,b)$ y un elemento desconocido en la casilla $(a+1, b)$.

$d_g = \frac{(g-a)x-(g-a-1)n1-n4}{h-b}$ →

$d_e = \frac{(e-a)x-(e-a-1)n1-n3}{f-b}$ →

$d_c = \frac{(c-a)x-(c-a-1)n1-n2}{d-b}$ →

									$n_3\,(g,h)$
		$n_3\,(e,f)$			$e-a$				
					$c-a$	$n_2\,(c,d)$			
					1				
					$n_1\,(a,b)$				

Como enuncia la Diferencia de Priscila, las diferencias forman progresiones aritméticas. En consecuencia, igualaremos d_g, a la expresión obtenida para el término g de la progresión que forman las diferencias de las filas, a partir de d_c y d_e.

$$\frac{(c-a)x-(c-a-1)n1-n2}{d-b}+\left\{\frac{(e-a)x-(e-a-1)n1-n3}{f-b}-\frac{(c-a)x-(c-a-1)n1-n2}{d-b}\right\}\frac{g-c}{e-c}=\frac{(g-a)x-(g-a-1)n1-n4}{h-b}\equiv\left\{\frac{c-a}{d-b}+\left(\frac{e-a}{f-b}-\frac{c-a}{d-b}\right)\frac{g-c}{e-c}-\frac{g-a}{h-b}\right\}x=\frac{(c-a-1)n1+n2}{d-b}-\left\{\frac{(e-a-1)n1-n3}{f-b}-\frac{(c-a-1)n1-n2}{d-b}\right\}\frac{g-c}{e-c}-\frac{(g-a-1)n1-n4}{h-b}$$

En la ecuación desarrollada, el miembro que determina si la tabla tiene o no solución única es el de la izquierda, pues es en el que encontramos todas las variables. Para que la tabla tenga una única solución, en el polinomio que representa los coeficientes del elemento desconocido, debe cumplirse que: $\frac{c-a}{d-b}+\left\{\frac{e-a}{f-b}-\frac{c-a}{d-b}\right\}\frac{g-c}{e-c}-\frac{g-a}{h-b}\neq 0$. (Expresión 1)

Si operamos, obtendremos la fórmula del enunciado.

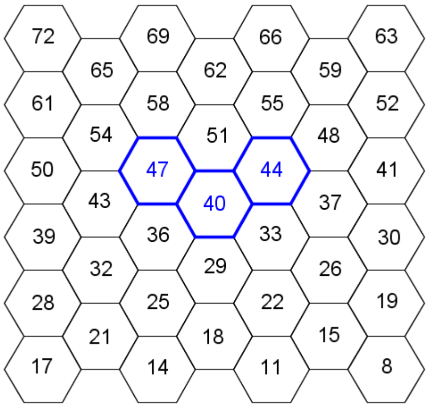
....

6._ TABLAS HEXAGONALES

En el trabajo con tablas bidimensionales, nos hemos dado cuenta de que si cambiamos la forma de las casillas o celdas, donde van colocados los números que componen la tabla, podemos abrir un campo nuevo de problemas y de progresiones. Vamos a suponer que la forma de las casillas es exagonal, de manera que cada p.a. está formada por los hexágonos que tienen un lado común y conforman una dirección en el plano; como puede observarse en el ejmplo que presentamos a continuación, hay tres direcciones diferentes: la vertical, la “diagonal hacia la dirección arriba-derecha y la diagonal hacia la dirección arriba-izquierda.

6.1._ PROPIEDADES ESPECÍFICAS. TEOREMAS 7, 8 Y 9

A continuación mostramos un ejemplo de este tipo de red:



Como se puede observar, cada hexágono de la red forma parte de tres p.a diferentes, según las direcciones anteriormente descritas.

Veamos algunas propiedades que se cumplen, que nos han causado sorpresa por lo inesperadas.

....

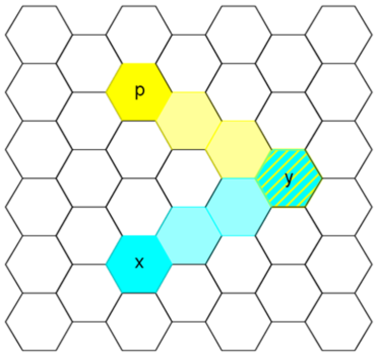
6.3._ LA COMPLECIÓN DE UNA TABLA HEXAGONAL

Ahora vamos a tratar de resolver el problema de completar la tabla hexagonal a partir del conocimiento de algunos de sus elementos

6.3.1._ TEOREMA 13. *Dados dos elementos de la tabla, con coordenadas conocidas, la tabla tendrá siempre infinitas soluciones.*

Al igual que en el apartado 4.1, existen dos casos diferentes:

- **Los dos elementos conocidos (x, y) comparten una línea en común.**

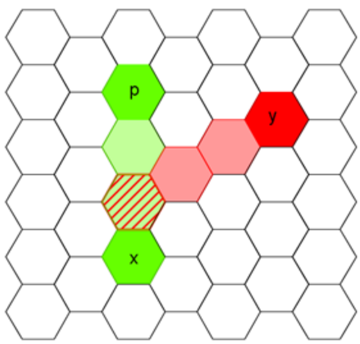


Seguimos el proceso siguiente:

- Completamos la p.a. diagonal que incluye a los dos elementos conocidos (p.a. en azul).
- Situamos el elemento desconocido en una casilla que no pertenezca a la p.a. que contiene a "x" y a "y".
- Desarrollamos la p.a. que incluye al elemento desconocido (p), que corta a la p.a. en azul.
- Una vez que tenemos estas dos p.a., calculamos la diferencia más fácil de hallar, en este caso se trata de la vertical (como hemos demostrado anteriormente, en una red formada por hexágonos todas las líneas paralelas comparten la misma diferencia).
- Gracias a esta diferencia podremos rellenar toda la red.

Sin embargo, como una de las p.a. (en amarillo en este caso) está expresada en función de p, la diferencia que obtengamos también lo va a estar. En consecuencia, toda la red estará expresada en función de p y la tabla tendrá tantas soluciones como valores se le den a p.

- **Los dos elementos conocidos (x, y) no comparten ninguna una línea en común.**



En este caso seguimos los siguientes pasos:

- ➢ Situamos el elemento desconocido (p) en la misma columna que x.
- ➢ Completamos la p.a. que incluye a “p” y a “x” (en verde).
- ➢ Desarrollamos la p.a. (en rojo) que pasa por “y” y corta a la p.a. en verde.
- ➢ Calculamos la diferencia de la diagonal que desciende a medida que avanzamos hacia la derecha.
- ➢ Rellenamos la red.

Por el contrario, como una de las p.a. (verde) está expresada en función del elemento desconocido, p, la p.a. en rojo también lo va a estar. Esto hace que la diferencia de la diagonal y por consiguiente toda la red esté expresada en función de p.

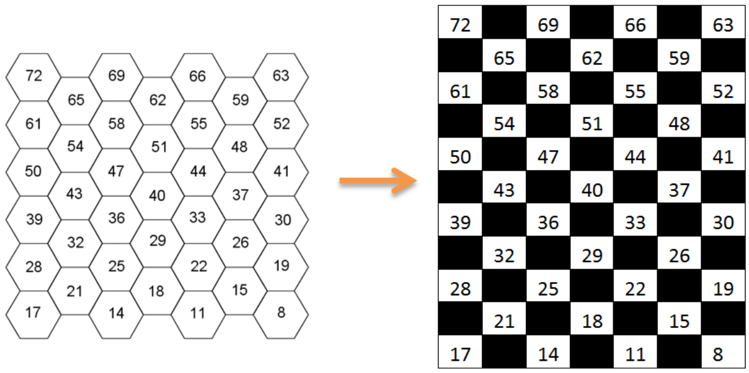
6.3.2._ TEOREMA 14. *Dados 3 elementos de la tabla, $n_{a,b}$, $n_{c,d}$ y $n_{e,f}$, (los subíndices representan las coordenadas de cada elemento en la red, en el sentido que se explica al principio de la demostración) la red de hexágonos tendrá una forma única de completarse cuando*

$$a+f-b+\frac{(a+d-b)(e-a-f+b)}{a+d-b-c} \neq 0"$$

DEMOSTRACIÓN:

El razonamiento seguido es muy similar al utilizado en tablas formadas por cuadrados. Igualaremos un elemento ($n_{e,f}$) a la expresión obtenida para la casilla con coordenadas (e,f), a partir de $n_{a,b}$, $n_{c,d}$, y un elemento desconocido situado en la casilla $(a+1, b+1)$.

Sin embargo, para nuestra demostración, con el fin de establecer las coordenadas de las casillas más fácilmente, hemos construido un “modelo matemático” que sirve para representar las redes hexagonales, y que consiste en una red con las casillas cuadradas en la que no todas las casillas están ocupadas. Hemos comprobado, para este demostración, que tiene muchas ventajas el trabajar con ella, en vez de con los hexágonos. Además, en esta red, se visualiza muy bien la progresión aritmética horizontal de la que antes hemos hablado, que estaba escondida. Hemos coloreado de negro las casillas que están vacías. Puede verse en el ejemplo siguiente:



Por último, para facilitar la expresión en la demostración, llamaremos:

- diagonales “+” a aquellas que quedan definidas con la ecuación $y = x + a$
- diagonales “-” a las que quedan definidas por la ecuación $y = -x + a$.

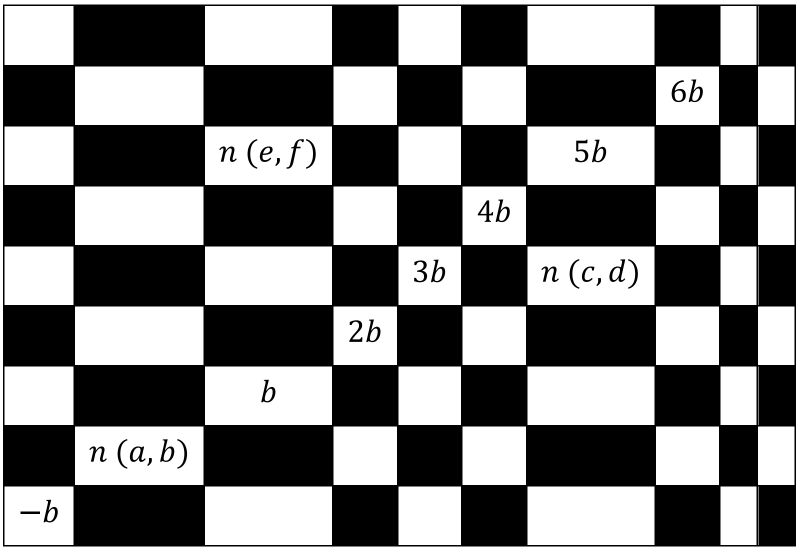
También queríamos recordar que sólo se van a representar los coeficientes de la incógnita, por la razón expuesta en los apartados anteriores.

Para hallar la expresión obtenida en la casilla (e,f), a partir de $n_{a,b}$ $n_{c,d}$ y un elemento desconocido (b) situado en la casilla $(a+1, b+1)$, hemos seguido los siguientes pasos:

- Calcular la diferencia vertical de la tabla (anteriormente hemos demostrado que la diferencia para todas las columnas es igual). Para ello hay que:

- ➢ Completar la p.a. diagonal “+” (pa_z) que pasa por $n_{a,b}$.

➢ Dividir al coeficiente de la incógnita de la casilla que pertenece a la columna d y a la pa$_z$ $(a + d - b)$, la distancia entre esta casilla y la casilla con coordenadas (c,d); $\frac{a+d-c-b}{2}$.



○Atención, el valor obtenido hay que dividirlo entre dos, puesto que las casillas en negro no están ocupadas. Seguimos con el siguiente paso del proceso:

• Sumar al coeficiente de la incógnita de la casilla que pertenece a la columna f y a la pa$_z$ $(a + f - b)$, el producto de la diferencia vertical $\frac{2(a+d-b)}{a+d-b-c}$ por la distancia entre esta casilla y la casilla con coordenadas (e,f) entre dos; $\frac{e-a-f+b}{2}$.

La expresión obtenida es la siguiente:

$$a + f - b + \left(\frac{2(a + d - b)}{a + d - b - c}\right)\left(\frac{e - a - f + b}{2}\right)$$

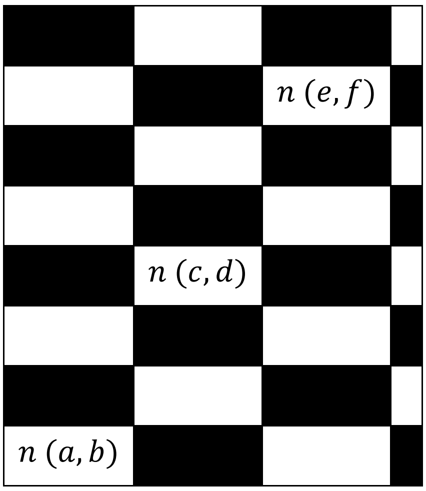
Como se trata de la expresión que obtenemos en la casilla (e,f), la igualamos al coeficiente de la incógnita del elemento conocido de esta casilla, que es igual a 0. Si se cumple que la expresión obtenida es igual a 0, la ecuación tendrá infinitas soluciones, y por lo tanto, la tabla también. Si fuera distinto de 0, la tabla tendría entonces una única solución:

$a + f - b + \left(\frac{2(a+d-b)}{a+d-b-c}\right)\left(\frac{e-a-f+b}{2}\right) \neq 0$

Por tanto

$$a + f - b + \left(\frac{a + d - b}{a + d - b - c}\right)(e - a - f + b) \neq 0$$

6.3.3._ CASOS PARTICULARES



6.3.3.1._ ESCALERA ALEJANDRINA: *dados cuatro elementos conocidos como los de la tabla se cumple que se encuentran en una misma diagonal.* **(Figura)**

6.3.4._ COMPLECIÓN CON n ELEMENTOS

Se debe aplicar la fórmula descrita anteriormente para todos los elementos dados manteniendo siempre dos elementos.